2.1.6 Πράξεις (ασκήσεις με πράξεις για εξάσκηση)

Ο γρηγορότερος τρόπος για να βρούμε τη δεκαδική τιμή ενός κλάσματος είναι να κάνουμε τον παρονομαστή 10 , 100 ή 1000 , π.χ.

$$\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{8}{10}=0,8 \quad , \quad \frac{13}{25}=\frac{13\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{52}{100}=0,52 \quad , \quad \frac{1}{3}=0,33...\simeq\frac{33}{100} \quad , \quad \frac{1}{6}=0,166...\simeq\frac{16,6}{100}$$

$$\frac{5}{3}=5\cdot\frac{1}{3}=5\cdot 0,33...\simeq 1,66... \quad , \quad \frac{8}{6}=\frac{4}{3}=\frac{3+1}{3}=1+\frac{1}{3}=1+0,33...\simeq 1,33... \quad , \quad 3\cdot 0,33...=1$$

Στις διάφορες ασκήσεις Χημείας που αφορούν αέρια, εμφανίζονται οι αριθμοί :
100,8 , 89,6 , 78,4 , 67,2 , 56 , 44,8 , 33,6 , 22,4 , 11,2 , 5,6 , 2,8 , 1,9 που είναι πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 22,4 (ή του 11,2).

Οι παρακάτω ασκήσεις είναι από διάφορα βιβλία Φυσικής, Χημείας, Βιολογίας και Αρχών Οικονομικής Θεωρίας.

Παραδείγματα

1 . Να γίνουν οι πράξεις χωρίς τη χρήση υπολογιστή : α) 4620:5 β) $\mathbf{\frac{25\cdot 500-20\cdot 600}{20\cdot 600}\cdot 100}$

γ) $\mathbf{10\cdot 2,8-\frac{\frac{25}{7}}{2}\cdot 2,8^2}$ **δ)** $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{3}\cdot 10^{-4})^2}{10^{-6}}+0,005\right)\cdot 200}$ **ε)** $\mathbf{\frac{1,96}{(1-0,3)^2}}$

Λύση :

α) $4620:5=\frac{4620}{5}=\frac{462\cdot 10}{5}=\frac{462\cdot \cancel{10}^{2}}{\cancel{5}}=(400+60+2)\cdot 2=800+120+4=924$

β) $\frac{25\cdot 500-20\cdot 600}{20\cdot 600}\cdot 100=\frac{100\cdot(25\cdot 5-20\cdot 6)}{20\cdot 600}\cdot 100=$ (βγάζω κοινό παράγοντα το 100)

$=\frac{\cancel{100}\cdot(25\cdot 5-20\cdot 6)}{2\cancel{0}\cdot\cancel{600}_{6}}\cdot 10\cancel{0}=\frac{25\cdot 5-20\cdot 6}{2\cdot 6}\cdot 10=\frac{125-120}{\cancel{2}\cdot 6}\cdot\cancel{10}^{5}=\frac{5}{6}\cdot 5=\frac{25}{6}=\frac{24+1}{6}=$

$=\frac{24}{6}+\frac{1}{6}=4+\frac{1}{6}=4+0,166...=4,17$

γ) $10\cdot 2,8-\frac{\frac{25}{7}}{2}\cdot 2,8^2=28-\frac{25}{2\cdot 7}\cdot 28\cdot 10^{-1}\cdot 28\cdot 10^{-1}=28\left(1-\frac{25\cdot 28}{2\cdot 7\cdot 10^2}\right)=28\left(1-\frac{25\cdot\cancel{28}^{4}}{2\cdot\cancel{7}\cdot 10^2}\right)=$

$=28\left(1-\frac{\cancel{25\cdot 4}}{2\cdot\cancel{100}}\right)=28\left(1-\frac{1}{2}\right)=28\cdot\frac{1}{2}=14$

δ) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{3}\cdot 10^{-4})^2}{10^{-6}}+0,005\right)\cdot 200=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 10^{-8}}{10^{-6}}+5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2\cdot 10^2=\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2\cdot 10^2=$

$=\left(\frac{3}{2}\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2\cdot 10^2=\left(1,5\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2\cdot 10^2=\left(15\cdot 10^{-3}+5\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2\cdot 10^2=$

$=(15+5)\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^2=20\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^2=40\cdot 10^{-1}=4$

ε) $\dfrac{1,96}{(1-0,3)^2}=\dfrac{196\cdot 10^{-2}}{\left(1-\dfrac{3}{10}\right)^2}=\dfrac{196\cdot 10^{-2}}{\left(\dfrac{7}{10}\right)^2}=\dfrac{196\cdot 10^{-2}}{\dfrac{49}{100}}=\dfrac{196\cdot 10^{-2}\cdot 100}{49}=\dfrac{\overset{4}{\cancel{196}}\cdot 1}{\cancel{49}}=4$

Ασκήσεις

191. Να γίνουν οι πράξεις χωρίς τη χρήση υπολογιστή :

1.	$6,023\cdot 200$	2.	$\dfrac{0,64\cdot 2,7}{2,56\cdot 0,9}\cdot 20$	3.	$\dfrac{128\cdot 4}{32\cdot 8}$
4.	$\dfrac{3,2\cdot 25}{0,5\cdot 16}$	5.	$\dfrac{0,7\cdot 0,81\cdot 0,14}{0,09\cdot 0,049\cdot 0,18}$	6.	$\dfrac{0,46\cdot 200}{8\cdot 23}$
7.	$\dfrac{756-504}{12-8}\cdot\dfrac{1}{0,9}$	8.	$2,6\cdot\dfrac{40\cdot 0,8}{0,128\cdot 13}$	9.	$\dfrac{22,4\cdot 0,9}{18\cdot 5,6}$
10.	$\dfrac{44,8\cdot 18}{72\cdot 11,2}\cdot 0,3$	11.	$\dfrac{54,6\cdot 22,4}{56\cdot 273\cdot 8}$	12.	$\dfrac{22,4}{273}+\dfrac{11,2}{546}-\dfrac{56}{546}$
13.	$\left(\dfrac{4}{11,2}+\dfrac{4}{22,4}-\dfrac{10}{56}\right)\cdot 2,8$	14.	$\dfrac{6,023\cdot 200+795,4}{5\cdot 90+50}$	15.	$\dfrac{0,27\cdot 0,81}{1,62\cdot 0,9\cdot 45}\cdot 30$
16.	$12,8\cdot\dfrac{1,2\cdot 6,3}{0,54\cdot 1,4\cdot 32}$	17.	$\dfrac{4,5\cdot 15}{2,7\cdot 1,25}\cdot 0,3$	18.	$\dfrac{1,1\cdot(5\cdot 0,12+0,8)}{2,8\cdot(3,1+7,9)}$
19.	$\dfrac{2,56\cdot 0,6}{3,2\cdot 0,48}\cdot 0,1$	20.	$\dfrac{4,4\cdot 3+6,8}{(5\cdot 1,2+4)\cdot 0,5}$	21.	$\dfrac{8,5\cdot 0,082}{17\cdot 4,1}\cdot 400$
22.	$\dfrac{10\cdot 19,6}{2\cdot 98}$	23.	$240\cdot 90\%$	24.	$\dfrac{1152}{(1+0,2)^3}$
25.	$300\cdot 70\%$	26.	$500\cdot(1+0,2)^3$	27.	$\dfrac{72-70}{3750-1875}\cdot\dfrac{1875}{70}$
28.	$\dfrac{4620}{6}$	29.	$\dfrac{80-120}{150-100}\cdot\dfrac{100}{120}$	30.	$\dfrac{30-50}{150-100}\cdot\dfrac{100}{50}$
31.	$\dfrac{\dfrac{180-200}{200}}{\dfrac{60-50}{50}}$	32.	$\dfrac{3276-4000}{4000}\cdot 100$	33.	$\dfrac{95-100}{33-30}\cdot\dfrac{30}{100}$
34.	$\dfrac{756-504}{12-8}$	35.	$\dfrac{12600-10080}{70-56}\cdot\dfrac{1}{60}$	36.	$\dfrac{6-10}{30-20}\cdot\dfrac{30+20}{6+10}$
37.	$\dfrac{24-10}{50000-40000}\cdot\dfrac{40000}{10}$	38.	$56+\dfrac{87360}{1680}+48$	39.	$-0,4\cdot\dfrac{60-50}{50}\cdot 150+150$
40.	$\dfrac{800-600}{3y-y}\cdot\dfrac{y}{600}$	41.	$\dfrac{120-75}{50-30}$	42.	$\dfrac{30-20}{135-120}$
43.	$\dfrac{80-100}{60-50}\cdot\dfrac{50+60}{100+80}$	44.	$\sqrt{\dfrac{200\cdot 0,01+2\cdot 3}{200}}$	45.	$\dfrac{2,12\cdot 71}{53\cdot 0,02\cdot 14,2}$
46.	$\sqrt{(-0,25)^2+\dfrac{2}{32}(\sqrt{3})^2}$	47.	$400\left(-0,5\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(10\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	48.	$\sqrt{0,05^2+\dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{200}}$
49.	$\dfrac{1}{\sqrt{40\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-3}}}$	50.	$100\cdot 40\cdot 10^{-6}\cdot 2500$	51.	$\dfrac{1000}{4\pi^2\cdot 0,5\left(\dfrac{5}{\pi}\right)^2}$

52.	$\frac{5\cdot10}{2\cdot7}\cdot1{,}4\frac{2}{5}$	53.	$\frac{1}{\sqrt{2\cdot10^{-6}\cdot80\cdot10^{-3}}}$	54.	$\left(40-\frac{4\cdot1{,}6}{1{,}28}\right)\cdot0{,}2\cdot8$
55.	$\frac{1}{12}\cdot4\cdot6^2$	56.	$\frac{\frac{1}{4}\cdot3\cdot4^2}{2\cdot10\cdot2}$	57.	$\sqrt{\frac{2\cdot10\cdot1{,}28}{2+3+\frac{10}{2}}}$
58.	$\frac{2\cdot6\cdot10\cdot\frac{5}{3}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot5^2}{50^2}$	59.	$\frac{1}{2}\cdot8\cdot0{,}04\cdot8$	60.	$40-\frac{4\cdot1{,}6^2}{1{,}28}$
61.	$\frac{1}{2}\cdot4\cdot0{,}04\cdot\frac{2}{0{,}2}$	62.	$\frac{2\cdot20}{2+3}\cdot\frac{1}{4}$	63.	$\frac{1}{2}2\cdot20^2-\frac{1}{2}5\cdot8^2$
64.	$\frac{3\cdot8^2}{2\cdot20^2}$	65.	$\frac{0{,}1\cdot48-0{,}9\cdot2}{3^2\cdot0{,}1+0{,}1}$	66.	$\sqrt{100-2\cdot0{,}2\cdot10\cdot9}$
67.	$\frac{16}{2\cdot10\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$	68.	$\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot4\cdot10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$	69.	$\sqrt{256-2\cdot10\cdot3{,}2}$
70.	$480-\frac{1}{2}(5+35)\left(\sqrt{3}\right)^2$	71.	$50+5\cdot\frac{9}{0{,}18}$	72.	$\sqrt{10^6\left(16\cdot10^{-6}-12\cdot10^{-6}\right)}$
73.	$\sqrt{1{,}8+4\cdot10\cdot0{,}18}\left(\frac{0{,}2+4{,}8}{0{,}2}\right)$	74.	$\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	75.	$\sqrt{\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{100}+0{,}1^2}$
76.	$\sqrt{\frac{4\pi^2\left(2\cdot10^{-6}\right)^2}{\left(2\pi\cdot10^{-3}\right)^2}+\left(2\sqrt{3}\cdot10^{-3}\right)^2}$	77.	$\frac{1}{2}200\left(0{,}2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	78.	$\frac{2{,}7}{45}+0{,}4$
79.	$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+3+2\cdot2\sqrt{3}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)}$	80.	$\sqrt{\frac{(-2\cdot10^{-6}\cdot3)^2\cdot10^9}{9\cdot10^{-3}}}$		

Απαντήσεις:

1.	1204,6	2.	15	3.	2	4.	10	5.	100
6.	$\frac{1}{2}=0{,}5$	7.	70	8.	50	9.	$\frac{1}{5}=0{,}2$	10.	$\frac{3}{10}=0{,}3$
11.	$\frac{1}{100}=0{,}01$	12.	0	13.	1	14.	4	15.	$\frac{1}{10}=0{,}1$
16.	4	17.	6	18.	$\frac{1}{20}=0{,}05$	19.	$\frac{2}{15}$	20.	$\frac{24}{5}=4{,}8$
21.	4	22.	1	23.	243	24.	800	25.	210
26.	864	27.	0,028	28.	770	29.	–0,66	30.	–0,8
31.	–0,5	32.	–18,1	33.	–0,5	34.	63	35.	3
36.	–1,25	37.	5,6	38.	4	39.	138	40.	0,166
41.	2,25	42.	0,66	43.	–1,22	44.	0,2	45.	10
46.	0,5	47.	–1000	48.	0,1	49.	2500	50.	10
51.	20	52.	2	53.	2500	54.	56	55.	12
56.	0,3	57.	1,6	58.	0,02	59.	1,28	60.	32
61.	0,8	62.	2	63.	240	64.	0,24	65.	3
66.	8	67.	1	68.	12	69.	$8\sqrt{3}$	70.	420
71.	300	72.	2	73.	75	74.	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	75.	0,2
76.	4	77.	2	78.	1	79.	3	80.	2

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών – Διαστήματα

1. Ιδιότητες Ανισοτήτων

1.	Για κάθε $\chi, y \in \mathbf{R}$ ισχύει : $\chi > y$ ή $\chi = y$ ή $\chi < y$		
2.	Προσοχή : α) η σχέση $\chi < y$ είναι ίδια με τη σχέση $y > \chi$ β) το αντίθετο της σχέσης $\chi < y$ είναι $\chi \geq y$		
3.	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$	4.	$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$
5.	$\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ ομόσημοι	6.	$\frac{\alpha}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ ετερόσημοι
7.	$\alpha^2 \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$	8.	$\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \beta > \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)
9.	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$	10.	$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$
11.	$\alpha > \beta \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \alpha\gamma > \beta\gamma$	12.	$\alpha > \beta \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
13.	$\alpha > \beta \overset{\gamma<0}{\Leftrightarrow} \alpha\gamma < \beta\gamma$	14.	$\alpha > \beta \overset{\gamma<0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
15.	$\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$	16.	$\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha - \delta > \beta - \gamma$
17.	$\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \geq 0 \\ \gamma > \delta \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta \geq 0$	18.	$\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \geq 0 \\ \gamma > \delta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta} > \frac{\beta}{\gamma} \geq 0$
19.	Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ ισχύει : $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta > \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$		
20.	Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbf{N}$ ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$		
21.	Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbf{N}^*$ ισχύει : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$		

2. Απόδειξη Ανισοτήτων

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα **συνήθως** ξεκινάμε από τη σχέση που μας ζητούν να αποδείξουμε προχωράμε με ισοδυναμίες και καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει ($\alpha^2 \geq 0$, $(2\chi - 7)^2 \geq 0$, $\sqrt{\alpha} \geq 0$, $\chi^2 + 1 > 0$)

Παράδειγμα : Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

Απόδειξη :

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \geq \alpha \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0 \quad \text{Ισχύει}$$

3. Παρατηρήσεις

Σε μια ανισότητα που εμφανίζεται ένα γινόμενο παραγόντων, **μπορώ να εξαλείψω τους θετικούς** παράγοντες χωρίς να αλλάξει φορά η ανισότητα, ενώ **αν εξαλείψω τους αρνητικούς θα αλλάξει η φορά** της ανισότητας. Π.χ.

1) $2(\chi - 3) > 0 \Leftrightarrow \chi - 3 > 0$
2) $-3(\chi + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi + 1 \leq 0$
3) $(-2\chi + 5)(\chi^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow -2\chi + 5 < 0 \quad \left(\text{αφού } \chi^2 + 1 > 0\right)$
4) $(-\chi^2 - 1)(-\chi - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -\chi - 1 \leq 0 \quad \left(\text{αφού } -\chi^2 - 1 < 0\right)$

4. Διαστήματα

	Διαστήματα	Ονομασία	Σύνολο
1.	$\chi \in$ **[α , β]** $\Leftrightarrow$ $\alpha \le \chi \le \beta$	**κλειστό α , β**	$[\alpha , \beta] = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \alpha \le \chi \le \beta\}$
2.	$\chi \in$ **(α , β)** $\Leftrightarrow$ $\alpha < \chi < \beta$	**ανοικτό α , β**	$(\alpha , \beta) = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \alpha < \chi < \beta\}$
3.	$\chi \in$ **[α , β)** $\Leftrightarrow$ $\alpha \le \chi < \beta$	**κλειστό α , ανοικτό β**	$[\alpha , \beta) = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \alpha \le \chi < \beta\}$
4.	$\chi \in$ **(α , β]** $\Leftrightarrow$ $\alpha < \chi \le \beta$	**ανοικτό α , κλειστό β**	$(\alpha , \beta] = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \alpha < \chi \le \beta\}$
5.	$\chi \in$ **[α , +∞)** $\Leftrightarrow$ $\alpha \le \chi$	**κλειστό α , +∞**	$[\alpha , +\infty) = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \alpha \le \chi\}$
6.	$\chi \in$ **(α , +∞)** $\Leftrightarrow$ $\alpha < \chi$	**ανοικτό α , +∞**	$(\alpha , +\infty) = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \alpha < \chi\}$
7.	$\chi \in$ **(–∞ , α]** $\Leftrightarrow$ $\chi \le \alpha$	**–∞ , κλειστό α**	$(-\infty , \alpha] = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \le \alpha\}$
8.	$\chi \in$ **(–∞ , α)** $\Leftrightarrow$ $\chi < \alpha$	**–∞ , ανοικτό α**	$(-\infty , \alpha) = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi < \alpha\}$
9.	$\chi \in$ **(–∞ , +∞)** $\Leftrightarrow$ $\chi \in \mathbf{R}$		$(-\infty , +\infty) = \mathbf{R}$

Ασκήσεις

192. Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν : $1{,}5 < \alpha < 3{,}5$ και $2{,}5 \le \beta \le 5{,}5$. Κάθε παράσταση της πρώτης στήλης ανήκει σε ένα μόνο διάστημα της δεύτερης στήλης.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Παράσταση	**Διάστημα**
	1. [4, 9]
Α. $\alpha + \beta$	**2.** (4, 9)
Β. $\alpha - \beta$	**3.** (– 4, 1)
Γ. $2\alpha - 1$	**4.** (2, 6)
Δ. $1 - 2\beta$	**5.** (10, – 4)
	6. [– 10, – 4]

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	

193. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ και $\alpha < 0$, ποιο από τα παρακάτω είναι **πάντα** σωστό :
Α. $\beta < 0$ **Β.** $\beta > 0$ **Γ.** $\gamma > 0$ **Δ.** $\gamma - \beta > 0$ **Ε.** $\alpha - \beta > 0$

194. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σω**στή (Σ)** ή Λάθος (**Λ**).

1.	Είναι $\chi \ge \chi$.	**Σ**	**Λ**
2.	Αν $\chi - y > 0$, τότε $\chi > y$.	**Σ**	**Λ**
3.	Αν $2 < \chi < y$, τότε $\chi \cdot y > 0$.	**Σ**	**Λ**
4.	Αν $2 < \chi < y$, τότε $\chi \cdot y - y^2 > 0$.	**Σ**	**Λ**
5.	Αν $\chi > 1$, τότε $\chi^3 > 1$.	**Σ**	**Λ**
6.	Αν $\chi > 1$, τότε $\chi^{-2} < -1$.	**Σ**	**Λ**
7.	Αν $0 < \chi < y$, τότε $\frac{1}{\chi} < \frac{1}{y}$.	**Σ**	**Λ**
8.	Αν $0 < \chi < 1$ και $\kappa > \lambda$ (κ , λ φυσικοί) , τότε $\chi^\kappa < \chi^\lambda$.	**Σ**	**Λ**
9.	Αν $\chi < 2$ και $y > 3$, τότε $3\chi - 2y < 0$.	**Σ**	**Λ**
10.	Αν $0 < \chi < 1 < y$ τότε $0 < \chi^2 < 1 < y^2$.	**Σ**	**Λ**
11.	Αν $\chi^2 > 1$ τότε $\chi > 1$.	**Σ**	**Λ**
12.	Αν $0 < \chi^2 < 1$ τότε $0 < \chi < 1$.	**Σ**	**Λ**
13.	Αν $-\chi < -y$ τότε $\chi^2 < y^2$.	**Σ**	**Λ**
14.	Αν $\chi < y < -1$ τότε $1 < -\chi < -y$.	**Σ**	**Λ**

15.	Υπάρχει $\chi \in \mathbf{R}$ ώστε $\chi^2 \le 0$.	Σ	Λ
16.	Ισχύει : $\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha - \delta > \beta - \gamma$.	Σ	Λ
17.	Αν $\alpha \in \mathbf{R}$ τότε : $-1 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2 \le 1$.	Σ	Λ
18.	Αν $\chi \in \mathbf{R}$ με $\chi < 3$, τότε $\chi \le 3$.	Σ	Λ
19.	Αν $\chi \in \mathbf{R}$ με $\chi \le 3$, τότε $\chi \le 5$.	Σ	Λ
20.	Αν $\chi \in \mathbf{R}$ με $\chi < 3$, τότε $\chi \le 7$.	Σ	Λ
21.	Για οποιουσδήποτε αριθμούς α , $\beta \ne 0$, με $\alpha < \beta$ ισχύει ότι : $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.	Σ	Λ
22.	Ισχύει : $\frac{34}{21} > \frac{3}{2}$.	Σ	Λ
23.	Αν $0 < \chi^2 < 9$ τότε $0 < \chi < 3$.	Σ	Λ
24.	Αν $\chi^2 < \chi$ τότε $0 < \chi < 1$.	Σ	Λ
25.	Ισχύει $\chi < 0 \Rightarrow \chi^2 > 0$.	Σ	Λ
26.	Αν $\chi > 4$ τότε $\chi - 4 < 0$.	Σ	Λ
27.	Αν $\chi > 4$ τότε $4 - \chi \le 0$.	Σ	Λ
27.	Αν $\chi < 4$ τότε $\chi - 6 \le 0$.	Σ	Λ
27.	Αν $\chi < -4$ τότε $4 + \chi < 0$.	Σ	Λ
28.	Ισχύει : $(\chi - 10)^2 + 2 > 0$.	Σ	Λ
28.	Αν $2\chi - 8 < 0$ τότε $\chi \ge 4$.	Σ	Λ
29.	Αν $0 < \chi < 1$ τότε $\chi < \chi^2 < \chi^3$.	Σ	Λ
30.	Αν $-1 < \chi < 0$ τότε $\chi^2 > \chi^3$.	Σ	Λ
31.	Αν $0 < \chi < 1$ τότε $\chi^{-2} > 1$.	Σ	Λ
32.	Αν $\chi > 0$ τότε $(1+\chi)^2 > 1 + \chi^2$.	Σ	Λ
33.	Αν $\alpha > 6$ και $\beta > 2$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 3$.	Σ	Λ

195. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω σχέσεις :

1.	Αν $1 < \chi < 3 \Rightarrow \ldots < \chi^2 < \ldots$	2.	Αν $-2 < \chi < -1 \Rightarrow \ldots < \chi^2 < \ldots$
3.	Αν $-2 < \chi < 3 \Rightarrow \ldots < \chi^2 < \ldots$	4.	Αν $-3 < \chi < 2 \Rightarrow \ldots < \chi^2 < \ldots$
5.	Αν $1 < \chi < 2 \Rightarrow \ldots < \frac{1}{\chi} < \ldots$	6.	Αν $-3 < \chi < -2 \Rightarrow \ldots < \frac{1}{\chi} < \ldots$
7.	Αν $\frac{1}{2} < \chi < 3 \Rightarrow \ldots < \frac{1}{\chi} < \ldots$	8.	Αν $1 < \chi < 3 \Rightarrow \ldots < \frac{1}{\chi^2} < \ldots$
9.	$0 < \chi < y < 1 \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots y^2 \ldots$	10.	$1 < \chi < y \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots y^2 \ldots$
11.	$-1 < \chi < y < 0 \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots y^2 \ldots$	12.	$\chi < y < -1 \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots y^2 \ldots$
13.	$0 < \chi < 1 \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots \chi^3 \ldots$	14.	$1 < \chi \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots \chi^3 \ldots$
15.	$0 < \chi < y < 1 \Rightarrow \ldots \frac{1}{\chi} \ldots \frac{1}{y} \ldots$	16.	$0 < \chi < 1 \Rightarrow \ldots \chi^2 \ldots \frac{1}{\chi} \ldots$
17.	$-1 < \chi < y < 0 \Rightarrow \ldots \frac{1}{\chi} \ldots \frac{1}{y} \ldots$	18.	$-1 < \chi < 0 < y < 1 \Rightarrow \ldots \chi^3 \ldots y^3 \ldots$
19.	$0 < \chi < 1 \Rightarrow \ldots \chi \ldots \frac{1}{\chi} \ldots$	20.	$0 < \chi < 1 \Rightarrow \ldots \chi \ldots \chi^2 \ldots$
21.	$1 < \chi \Rightarrow \ldots \chi \ldots \frac{1}{\chi} \ldots$	22.	$1 < \chi \Rightarrow \ldots \chi \ldots \chi^2 \ldots$

196. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπως οι δύο πρώτες γραμμές :

	Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός χ	**Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός χ**
1.	$1 < χ \le 3$	$χ \in (1\ ,\ 3]$
2.	$1 > χ \ge -2$ ή $χ \ge 5$	$χ \in [-2\ ,1) \cup [5\ ,\ +\infty)$
3.		$χ \in [2\ ,+\infty)$
4.	$χ \le 8$	
5.		$χ \in [-7\ ,\ -1]$
6.	$χ \ge -3$	
7.		$χ \in (-5\ ,+\infty)$
8.	$χ > -2$	
9.		$χ \in (-3\ ,\ 2)$
10.	$0 < χ < 6$	
11.		$χ \in (-\infty\ ,\ 4)$
12.	$-1 \le χ \le 0$	
13.		$χ \in [-5\ ,\ -2)$
14.	$-1 > χ$	
15.		$χ \in [-2\ ,\ 3]$
16.	$-5 \le χ < 5$	
17.	$-3 \ge χ$	
18.	$χ > 0$	
19.	$2 > χ \ge -1$	
20.	$χ \ge 3$	
21.		$χ \in (-\infty\ ,\ -2)$
22.	$5 > χ \ge 2$	
23.	$-1 \ge χ > -4$	
24.		$χ \in [-3\ ,\ 1]$
25.	$-2 < χ < 2$ ή $χ \ge 4$	
26.	$2 > χ > -2$ ή $χ \le -3$	
27.		$χ \in (-3\ ,\ 2] \cup (4\ ,\ +\infty)$
28.	$-2 > χ$ ή $χ \ge 3$	
29.	$χ < 1$ ή $χ \ge 2$	
30.		$χ \in (-\infty\ ,\ -2] \cup (1\ ,\ +\infty)$
31.	$-3 \le χ < -1$ ή $χ \ge 2$	
32.	$χ \le -2$ ή $χ > 3$	
33.		$χ \in (-3\ ,\ -1] \cup (3\ ,\ +\infty)$
34.	$χ \le -3$ ή $2 \le χ < 5$	
35.	$χ < -1$ ή $χ > 1$	

197. Αν $α=2^3$, $β=\frac{1}{α}$ και $γ=β^2$, τότε :

Α. $α > β > γ$ **Β.** $α < β < γ$ **Γ.** $α < γ < β$ **Δ.** $γ < α < β$ **Ε.** $β < γ < α$

198. Αν $\chi < 2$, ποια από τις ακόλουθες ανισώσεις **είναι λανθασμένη**:

Α. $2+\chi < 2+2$ **Β.** $\chi-2 < 2-2$ **Γ.** $2\chi < 2\cdot 2$ **Δ.** $2-\chi < 2-2$ **Ε.** $\frac{\chi}{2} < \frac{2}{2}$

199. Αν $\alpha < \beta$, τότε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες ισχύουν πάντοτε ;

1.	$-\alpha < -\beta$	2.	$\beta > \alpha$	3.	$\alpha - \beta < 0$	4.	$\beta - \alpha \geq 0$
5.	$\alpha + \beta > 0$	6.	$\alpha + \beta < 0$	7.	$\alpha + \beta < 2\beta$	8.	$-3\alpha \geq -3\beta$
9.	$2\alpha < \alpha - \beta$	10.	$\alpha - \beta < -\beta$	11.	$2\alpha + \beta < 3\beta$	12.	$-\alpha + \beta \geq 0$
13.	$\alpha \leq \alpha$	14.	$-\beta \leq -\beta$	15.	$\beta \geq \alpha$	16.	$-\alpha \geq -\beta$

200. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω σχέσεις με ανισότητες :

1.	Αν $\chi > 3 \Rightarrow \chi + 3$.........	2.	Αν $\chi > 3 \Rightarrow \chi - 3$.........
3.	Αν $\chi \geq 0 \Rightarrow -3\chi$.........	4.	Αν $\chi < -3 \Rightarrow 2\chi$.........
5.	Αν $\chi > 6 \Rightarrow \frac{\chi}{3}$.........	6.	Αν $\chi \leq -3 \Rightarrow -\frac{\chi}{3}$.........
7.	Αν $\chi > 5 \Rightarrow \frac{4\chi}{5}$.........	8.	Αν $\chi > -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2}\chi$.........

201. Για τους πραγματικούς αριθμούς χ , y ισχύει η σχέση της στήλης Α . Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς της στήλης Β.

	Στήλη Α	Στήλη Β
1.	$2 < \chi < y$	χ^2 , $(\chi-1)^2$, y^2 , $(y+1)^2$
2.	$0 < \chi < 1 < y$	χ , y , $-\chi$, $-y$, χ^2 , y^2 , $-\chi^2$, $-y^2$, 0 , 1 , -1
3.	$1 < \chi$	$\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{\chi}$, χ , $-\chi$, χ^2 , $-\chi^2$, χ^3 , $-\chi^3$, χ^4 , $-\chi^4$, χ^5 , $-\chi^5$, 0 , -1 , 1
4.	$1 < \chi < y$	1 , 0 , -1 , χ , y , $-\chi$, $-y$, $\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{y}$, χ^2 , χ^3 , $\frac{\chi}{y}$
5.	$0 < \chi < y < 1$	χ , y , $-\chi$, $-y$, $\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{y}$, χ^2 , $-\chi^2$, χ^3 , $-\chi^3$, 1 , 0 , -1
6.	$-1 < \chi < y < 0$	χ , y , $-\chi$, $-y$, $\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{\chi^2}$, $-\frac{1}{y^2}$, χ^2 , y^2 , y^3 , -1 , 0 , 1
7.	$0 < \chi < 1$	$\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{\chi^2}$, $-\frac{1}{\chi^2}$, $\frac{\chi+1}{2}$, χ , $-\chi$, χ^2 , $-\chi^2$, χ^3 , $-\chi^3$, 0 , -1 , 1
8.	$\chi < -1$	$\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{\chi}$, $\frac{1}{\chi^2}$, $-\frac{1}{\chi^2}$, $\frac{\chi-1}{2}$, χ , $-\chi$, χ^2 , $-\chi^2$, χ^3 , $-\chi^3$, 0 , -1 , 1
9.	$-1 < \chi < 0$	$\frac{1}{\chi}$, $-\frac{1}{\chi}$, χ , $-\chi$, χ^2 , $-\chi^2$, χ^3 , $-\chi^3$, χ^4 , $-\chi^4$, χ^5 , $-\chi^5$, 0 , -1 , 1

202. Να γράψετε με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα Α , Β , Α∪Β , Α∩Β.

1.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \leq 5\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi > -1\}$
2.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \geq 3 \text{ ή } \chi < -1\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \leq -2 \text{ ή } \chi > 2\}$
3.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \leq 5 \text{ ή } \chi > 8\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \geq 12 \text{ ή } \chi < -1\}$
4.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \geq -2 \text{ και } \chi < 7\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid 5 \geq \chi > -3\}$
5.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \geq 2\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi > 3\}$
6.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi > 3 \text{ ή } \chi \leq -2\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi \leq -1 \text{ ή } \chi > 2\}$
7.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi < 3 \text{ και } \chi \geq -1\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \chi > 5 \text{ ή } \chi < 2\}$

8.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi\ge 2 \text{ ή } \chi<-2\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi\le -3 \text{ ή } \chi>1\}$
9.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid -3\le\chi<1\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi>2 \text{ ή } \chi\le -1\}$
10.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi\ge 1 \text{ ή } \chi<-2\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid -2<\chi\le 3\}$
11.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi<-1 \text{ ή } \chi\ge 4\}$, $A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi\le 0 \text{ ή } \chi>5\}$
12.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid -2\le\chi<1 \text{ ή } \chi\ge 2\}$, $A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi<0 \text{ ή } 3\le\chi\le 5\}$
13.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi<-2 \text{ ή } \chi\ge 2\}$, $A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid -2\le\chi<0 \text{ ή } 1<\chi\le 2\}$
13.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \chi<-4 \text{ ή } \chi\ge 3\}$, $A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid -4\le\chi<2\}$

203. 1) Να αποδείξετε ότι : $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

2) Αν α , β ομόσημοι να δείξετε ότι : $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha-\frac{1}{\alpha}<\beta-\frac{1}{\beta}$.

204. Αν α , β , χ θετικοί αριθμοί και $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}>\frac{\alpha}{\beta}$.

205. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν : 1) $\beta>0 \Leftrightarrow \alpha+\beta>\alpha-\beta$

2) $0<\alpha<\beta$ και $0<\gamma<\delta \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta}<\frac{\beta}{\gamma}$ 3) $\alpha<0<\beta \Rightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)(\beta+1)(\alpha-2)<0$

206. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες :

1.	$\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$	2.	$(\chi+y)^2\ge 4\chi y$	3.	$2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge 2\alpha(\beta+\gamma)$
4.	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\le 1$	5.	$\alpha^2+\beta^2\ge\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$	6.	$(\alpha-\beta)^2\ge -4\alpha\beta$
7.	$\alpha^2+\beta^2\ge 4(\alpha-1)$	8.	$3\alpha^2+2\alpha+1>0$	9.	$\alpha^2+\beta^2+8\ge 4(\alpha+\beta)$
10.	$2(4\alpha^2+9\beta^2)\ge(2\alpha+3\beta)^2$	11.	$\alpha^2+\chi^2\ge 4\beta(\alpha-\beta)$	12.	$\alpha+\frac{1}{\alpha}\ge 2$, $\alpha>0$
13.	$\chi^2\ge\chi-\frac{1}{4}$	14.	$\alpha^2-4\alpha+5>0$	15.	$2\alpha^2-10\alpha+25>0$
16.	$\alpha^2-\alpha+1>0$	17.	$\alpha^4-7\alpha^2+16>0$	18.	$\alpha^2+\beta^2+18\ge 6(\alpha-\beta)$
19.	$2\chi^2+y^2+\omega^2\ge 2\chi(y-\omega)$	20.	$2\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta-4(\alpha+1)$	21.	$\alpha^2+\beta^2+5\ge 2(\alpha-2\beta)$
22.	$\chi(\chi+2)\ge 2(3\chi-2)$	23.	$\frac{(\chi+3)^2}{4}\ge\chi+2$		

207. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες :

1.	Αν $\chi>2$ τότε $\chi^3>2\chi^2-\chi+2$.
2.	Αν $\chi<1<y$ τότε $\chi y-\chi-y+1<0$.
3.	Αν $\chi<z$ και $0<y<\omega$ τότε $\chi-\frac{1}{y}<z-\frac{1}{\omega}$.
4.	Αν $\chi>1$ να αποδειχθεί ότι : $\chi^3>\chi^2-\chi+1$.
5.	Αν $\chi\ne 0$ να δείξετε ότι : $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\ge\alpha+\frac{1}{\alpha}$.

208. Αν $-1\le\chi\le 1$ βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

α) 2χ β) $\chi+1$ γ) $1-\chi$ δ) $3\chi-2$ ε) $5-2\chi$ στ) $\chi-2$ ζ) $3-\chi$

209. Αν $0<\alpha<\beta$

α) να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες :

1.	$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\ge 4$	2.	$\alpha^3+\beta^3\ge\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$	3.	$\beta^3-\alpha^3>\beta^2\alpha-\beta\alpha^2$
4.	$\frac{1}{\alpha}+\frac{4}{\beta}\ge\frac{9}{\alpha+\beta}$	5.	$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\beta+1}{\alpha+1}<\frac{\beta}{\alpha}$	6.	$\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}\ge\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$
7.	$2(\alpha^2+\beta^2)\ge(\alpha+\beta)^2$	8.	$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$		

β) να συγκρίνετε τις παρακάτω παραστάσεις :

1.	$(\alpha-2\beta)^2$ και $\beta(4\beta-3\alpha)$	2.	$\frac{\alpha-2}{\alpha}$ και $\frac{\beta-2}{\beta}$	3.	$\alpha^2\beta-\alpha^3$ και $\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta$
4.	$(\alpha+1)^3$ και $1+3\alpha+3\alpha^2$	5.	$\frac{\alpha^5}{\beta^5}$ και 1	6.	$\alpha^{10}\beta^7$ και $\beta^{10}\alpha^7$
7.	$3\alpha^2$ και $\alpha\beta+\beta^2$	8.	$\frac{\alpha+3}{\alpha+2}$, $\frac{\alpha+4}{\alpha+5}$, 1 , $\frac{\alpha+4}{\alpha+3}$		

210. Αν $\chi\in(1,2)$ βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

α) 3χ β) χ–2 γ) 1–χ δ) 3χ–2 ε) 5–2χ στ) 2χ–5 ζ) 3–4χ

211. Αν $-2\le\chi\le4$ **(1)** και $1\le y\le3$ **(2)** να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

α) 2χ+y β) 3χ–5y γ) χ^2-3y^2

212. Αν $1<\chi<2$ **(1)** και $-3<y<-2$ **(2)** να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις

1.	$2\chi+3y$	2.	$\chi-y$	3.	$3\chi-2y$
4.	$-\chi-4y$	5.	$3-\chi y$	6.	$\frac{\chi}{y}+1$
7.	χ^2+2y	8.	$\chi y-5$	9.	$\frac{1}{\chi}+y$
10.	$\frac{1}{y}-2\chi$	11.	$\frac{2}{\chi}-\frac{1}{y}$	12.	$1-\frac{2}{\chi y}$
13.	$4\chi-3y$	14.	χ^2+y^2	15.	$\chi y-2$
16.	$3-\frac{\chi}{y}$	17.	χ^3-3y^2	18.	$\frac{1}{\chi}-\frac{2}{y}$
19.	$4\chi-2y+1$	20.	$2-3\chi y$	21.	$2\chi^2+y^2$
22.	$y^2-\chi^3$	23.	$(\chi+2)^2-2y$	24.	$1-\frac{\chi}{y}$
25.	$\frac{\chi}{2}-2y$	26.	$y^2-2\chi^2-\chi y$	27.	$\frac{y}{\chi}-1$

213. Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha+\beta=1$ **(1)** , να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις :

1.	$\alpha\beta\le\frac{1}{4}$	2.	$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\ge4$	3.	$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\ge9$
4.	$\alpha^2+\beta^2\ge\frac{1}{2}$	5.	$\alpha^3+\beta^3\ge\frac{1}{4}$	6.	$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\ge\frac{25}{2}$
7.	$\alpha^4+\beta^4\ge\frac{1}{8}$	8.		9.	

214. Αν $2<\alpha<5$ και $3<\beta<8$ να αποδείξετε ότι : $\frac{9}{8}<\frac{\alpha}{2\beta}+1<\frac{11}{6}$.

215. Να αποδειχθεί ότι : 1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$. (Υπόδειξη : Πολλαπλασιάστε με το 2)

2) $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\geq\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma$

216. Αν α , β , γ ομόσημοι αριθμοί, δείξτε ότι : α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$ β) $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\geq 6$

217. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

1.	$\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2+4\leq 4\beta$	2.	$4\alpha^2+\beta^2+4\alpha-2\beta+2\leq 0$
3.	$\alpha^2+\beta^2+20\leq 4(2\beta-\alpha)$	4.	$(\alpha+1)^2+\beta^2\leq 4\alpha-3(2\beta+3)$
5.	$2\alpha^2+\beta^2+9\leq 2\alpha(3-\beta)$	6.	$(\alpha-1)^2+(\beta+3)^2\leq 2(2\alpha+\beta)-3$

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

1. Ορισμός

$$|\chi| = \begin{cases} \chi \ , & \text{αν} \quad \chi \geq 0 \\ -\chi \ , & \text{αν} \quad \chi < 0 \end{cases}$$

Η ιδιοτροπία του ορισμού βρίσκεται στο $-\chi$. Αν $\chi < 0 \Rightarrow -\chi > 0$.

Δηλαδή αν ο χ είναι ένας αριθμός της μορφής : -2 , $-3/5$, $-\sqrt{2}$ τότε η αντίστοιχη απόλυτη τιμή είναι : $-(-2)$, $-(-3/5)$, $-\left(-\sqrt{2}\right)$ δηλαδή : 2 , $3/5$, $\sqrt{2}$

Συνεπώς $|\chi| \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathbf{R}$

<u>Γεωμετρικά</u>, αφού οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν σε μια ευθεία γραμμή, η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι η απόσταση του από το 0 . Ως γνωστόν η απόσταση είναι πάντα μη αρνητική (θετική ή 0).

2. Ιδιότητες

1.	$\|\chi\| = 0 \iff \chi = 0$	2.	$\|\chi\| = \|-\chi\| \geq 0$
3.	$\|\chi\| = \chi \iff \chi \geq 0$	4.	$\|\chi\| = -\chi \iff \chi \leq 0$
5.	$\|\chi\| = \|-\chi\| \geq \chi$	6.	$\|\chi\| = \|-\chi\| \geq -\chi$
7.	$-\|\chi\| \leq \chi \leq \|\chi\|$, $-\|\chi\| \leq -\chi \leq \|\chi\|$	8.	$\|\chi\|^2 = \chi^2$ και γενικά $\|\chi\|^{2k} = \chi^{2k}$
9.	$\|\chi^\nu\| = \|\chi\|^\nu \quad \nu \in \mathbf{Z}$	10.	$\|\chi\| = \theta \quad (\theta > 0) \iff \chi = \theta$ ή $\chi = -\theta$
11.	αν $\chi > 0$ τότε $\|\chi\|^{2k+1} = \chi^{2k+1}$	12.	αν $\chi < 0$ τότε $\|\chi\|^{2k+1} = -\chi^{2k+1}$
13.	$\|\chi \cdot y\| = \|\chi\| \cdot \|y\|$	14.	$\|\chi_1 \cdot \chi_2 \cdots \chi_\nu\| = \|\chi_1\| \cdot \|\chi_2\| \cdots \|\chi_\nu\|$
15.	$\left\|\frac{\chi}{y}\right\| = \frac{\|\chi\|}{\|y\|}$ με $y \neq 0$	16.	$\|\chi\| = \|y\| \iff \begin{cases} \chi = y \\ \text{ή} \\ \chi = -y \end{cases}$
17.	$\big\| \|\chi\| - \|y\| \big\| \leq \|\chi \pm y\| \leq \|\chi\| + \|y\|$	18.	$\|\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_\nu\| \leq \|\chi_1\| + \|\chi_2\| + \ldots + \|\chi_\nu\|$
19.	$\|\chi\| \leq \theta \iff -\theta \leq \chi \leq \theta$, με $\theta > 0$ δηλαδή $\chi \in [-\theta\ ,\ \theta]$, $\theta > 0$	20.	$\|\chi\| \geq \theta \iff \begin{cases} \chi \leq -\theta \\ \text{ή} \\ \chi \geq \theta \end{cases}$, με $\theta > 0$ δηλαδή $\chi \in (-\infty\ ,\ -\theta] \cup [\theta\ ,\ +\infty)$, $\theta > 0$
21.	$\|\beta - \gamma\| = \begin{cases} \beta - \gamma \ , & \text{αν } \beta - \gamma \geq 0 \iff \beta \geq \gamma \\ \gamma - \beta \ , & \text{αν } \beta - \gamma < 0 \iff \beta < \gamma \quad \text{διότι } -(\beta - \gamma) = \gamma - \beta \end{cases}$		

3. Απόδειξη της ιδιότητας $\big| |\chi| - |y| \big| \leq |\chi - y|$

$$\big||\chi| - |y|\big| \leq |\chi - y| \iff \big||\chi| - |y|\big|^2 \leq |\chi - y|^2 \iff \left(|\chi| - |y|\right)^2 \leq (\chi - y)^2 \iff$$

$$\iff |\chi|^2 - 2|\chi||y| + |y|^2 \leq \chi^2 - 2\chi y + y^2 \iff \chi^2 - 2|\chi y| + y^2 \leq \chi^2 - 2\chi y + y^2 \iff$$

$\iff -2|\chi y| \leq -2\chi y \iff |\chi y| \geq \chi y$ το οποίο ισχύει λόγω της ιδιότητας $(-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|)$

Όμοια αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα μέρη της ιδιότητας $\big| |\chi| - |y| \big| \leq |\chi \pm y| \leq |\chi| + |y|$

<u>Ερώτηση</u> : Πότε $\big| |\chi| - |y| \big| = |\chi - y|$;

Απάντηση :

$||χ|-|y|| = |χ-y| \;\Leftrightarrow\; |χy| = χy \;\Leftrightarrow\; χy \ge 0 \;\Leftrightarrow\;$ χ , y ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον 0

Ερώτηση : Πότε $||\mathbf{χ}|-|\mathbf{y}|| < |\mathbf{χ}-\mathbf{y}|$;

Απάντηση :

$||χ|-|y|| < |χ-y| \;\Leftrightarrow\; |χ\,y| > χy \;\Leftrightarrow\; χy < 0 \;\Leftrightarrow\;$ χ , y ετερόσημοι

4. Παρατηρήσεις

1.	$\frac{α}{β} = 0 \;\Leftrightarrow\; α = 0$ (Πρέπει $β \neq 0$)	2.	$\frac{α}{β} = \frac{γ}{β} \;\Leftrightarrow\; α = γ$ $(β \neq 0)$
3.	$\frac{α}{β} > 0 \;\Leftrightarrow\; αβ > 0$ ομόσημοι $(β \neq 0)$	4.	$\frac{α}{β} < 0 \;\Leftrightarrow\; αβ < 0$ ετερόσημοι $(β \neq 0)$
5.	$α^2 = β^2 \Leftrightarrow α = β$ ή $α = -β$ ίσοι ή αντίθετοι	6.	$\lvert α\rvert = \lvert β\rvert \;\Leftrightarrow\; α = β$ ή $α = -β$ ίσοι ή αντίθετοι
7.	$(α+β)^2=0 \;\Leftrightarrow\; α+β=0 \;\Leftrightarrow\; α=-β$ αντίθετοι	8.	$α^2+β^2=0 \;\Leftrightarrow\; α=β=0$
9.	$\lvert α+β\rvert=0 \;\Leftrightarrow\; α+β=0 \;\Leftrightarrow\; α=-β$ αντίθετοι	10.	$\lvert α\rvert+\lvert β\rvert=0 \;\Leftrightarrow\; α=β=0$
11.	$α-β = -(β-α)$ Οι παραστάσεις $α-β$ και $β-α$ είναι αντίθετες		
12.	$(α-β)^2 = (β-α)^2$	13.	$\lvert α-β\rvert = \lvert β-α\rvert$
14.	$-α\cdot β + α\cdot γ = -α\cdot(β-γ)$	15.	$χ^2+y^2+z^2 =0 \;\Leftrightarrow\; χ=0$ και $y=0$ και $z=0$
16.	$χ\cdot y\cdot z =0 \;\Leftrightarrow\; χ=0$ ή $y=0$ ή $z=0$	17.	$\lvert χ\rvert+\lvert y\rvert+\lvert z\rvert =0 \;\Leftrightarrow\; χ=0$ και $y=0$ και $z=0$
18.	$χ\cdot y\cdot z \neq 0 \;\Leftrightarrow\; χ\neq 0$ και $y\neq 0$ και $z\neq 0$	19.	$\lvert χ\rvert+\lvert y\rvert+\lvert z\rvert \neq 0 \;\Leftrightarrow\; χ\neq 0$ ή $y\neq 0$ ή $z\neq 0$

Παραδείγματα

1 . Αν $χ\in(-2 , 1)$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2|χ-3|-3|2+χ|-|2χ-3|+|1-χ|$

Λύση :

Αφού $χ \in (-2 , 1) \;\Leftrightarrow\; -2 < χ < 1$. Τώρα έχουμε :

$-2<χ<1 \overset{-3}{\Leftrightarrow} -2-3<χ-3<1-3 \;\Leftrightarrow\; -5<χ-3<-2$ άρα $χ-3<0$

$-2<χ<1 \overset{+2}{\Leftrightarrow} -2+2<2+χ<2+1 \;\Leftrightarrow\; 0<2+χ<3$ άρα $2+χ>0$

$-2<χ<1 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2(-2)<2χ<2\cdot 1 \;\Leftrightarrow\; -4<2χ<2 \overset{-3}{\Leftrightarrow} -4-3<2χ-3<2-3 \;\Leftrightarrow\; -7<2χ-3<-1$

άρα $2χ-3<0$

$-2<χ<1 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 2>-χ>-1 \overset{+1}{\Leftrightarrow} 1+2>1+(-χ)>1+(-1) \;\Leftrightarrow\; 3>1-χ>0$, οπότε :

$A = -2(χ-3)-3(2+χ)+(2χ-3)+(1-χ) = -2χ+6-6-3χ+2χ-3+1-χ = -4χ-2.$

Ασκήσεις

218. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού χ , συμβολίζεται με .... και είναι μη .... αριθμός.

219. Ισχύει $|χ| = \begin{cases} -χ \;, & \text{αν } .... \\ χ \;, & \text{αν } .... \end{cases}$

220. Η απόσταση δύο αριθμών α και β συμβολίζεται με .... και είναι ίση με ....

221. Αν ισχύει $|α+β| = |α|+|β|$, τότε οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι ....

222. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε ανίσωση της στήλης Α, τη λύση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. $\lvert χ\rvert < 5$	**1.** $χ < -2$ ή $χ > 4$
Β. $\lvert χ-1\rvert > 3$	**2.** $-5 < χ < 5$
Γ. $1 < \lvert χ\rvert < 5$	**3.** $χ > 1$ ή $χ < -5$
	4. $-5 < χ < -1$ ή $1 < χ < 5$

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	

223. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με το αντίστοιχο της στήλης (Β).

στήλη (Α) σχέση που ικανοποιεί ο $χ \in \mathbf{R}$	**Στήλη (Β)** τιμές του χ
	1. $1 < χ < 3$
Α. $\lvert χ-4\rvert < 1$	**2.** $3 < χ < 5$
Β. $d(χ, 2) < 1$	**3.** $-3 < χ < -1$
Γ. $d(1, χ) \geq 2$	**4.** $χ \leq -1$ ή $χ \geq 3$
Δ. $\lvert χ+2\rvert > 5$	**5.** $-1 \leq χ \leq 3$
	6. $χ > 3$ ή $χ < -7$

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	

224. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης (Α) με την αριθμητική της τιμή στη στήλη (Β).

Στήλη (Α) παράσταση του χ με $\mathbf{1 < χ < 5}$	**Στήλη (Β)** αριθμητική τιμή παράστασης
	1. 2
$A = \dfrac{2(χ-1)}{\lvert χ-1\rvert}$	**2.** $-\dfrac{1}{6}$
$B = \dfrac{\lvert χ-1\rvert - χ}{\lvert χ+1\rvert + \lvert 5-χ\rvert}$	**3.** $\dfrac{13}{2}$
$Γ = \dfrac{-χ + \lvert 7+χ\rvert}{13}$	**4.** $\dfrac{7}{13}$
$Δ = \dfrac{\lvert χ-5\rvert}{2χ-10}$	**5.** $-\dfrac{1}{2}$
	6. -2

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	

225. Να αντιστοιχίσετε κάθε ανίσωση της στήλης (Α) με τις λύσεις της που βρίσκονται στη στήλη (Β)

Στήλη (Α) **Ανίσωση**	**Στήλη (Β)** **Λύσεις**
Α. $\lvert χ-2\rvert < 1$	**1.** Αληθεύει για κάθε $χ \in \mathbf{R}$
Β. $d(χ, -2) < 1$	**2.** $-3 < χ < -1$
Γ. $\lvert χ+3\rvert \geq 2$	**3.** $-1 < χ < 5$
Δ. $d(χ, 2) < 3$	**4.** $1 < χ < 3$
Ε. $\lvert χ+2\rvert > -2$	**5.** $χ \leq -5$ ή $χ \geq -1$

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	

226. Οι απόλυτες τιμές δύο **αντίστροφων** αριθμών είναι
Α. ίσες **Β.** αντίθετες **Γ.** ετερόσημες **Δ.** αντίστροφες **Ε.** μηδέν

227. Οι απόλυτες τιμές δύο **αντίθετων** αριθμών είναι
Α. ίσες **Β.** αντίθετες **Γ.** ετερόσημες **Δ.** αντίστροφες **Ε.** μηδέν

228. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

	Απόλυτη τιμή	**Ανισότητα**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
1.	$\|χ\| < 3$	$-3 < χ < 3$	$χ \in (-3\ ,\ 3)$
2.	$\|χ\| \ge 4$	$χ \le -4$ ή $χ \ge 4$	$χ \in (-\infty\ ,\ -4] \cup [4\ ,\ +\infty)$
3.	$\|χ\| > 2$		
4.			$χ \in [-3\ ,\ 3]$
5.		$χ \le -3$ ή $χ \ge 3$	
6.			$χ \in (-\infty\ ,\ -1] \cup [1\ ,\ +\infty)$
7.		$-5 < χ < 5$	
8.			$χ \in (-1\ ,\ 1)$
9.	$\|χ\| < 2$		
10.	$\|χ\| > 5$		
11.			$χ \in [-4\ ,\ 4]$
12.			$χ \in (-\infty\ ,\ -6) \cup (6\ ,\ +\infty)$
13.		$χ < -7$ ή $χ > 7$	
14.		$-7 \le χ \le 7$	

229. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης (Α) με την ισοδύναμή της που βρίσκεται στη στήλη (Β)

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
Α. $\|α\| + \|β\| = 0$	**1.** $α = \pm β$
Β. $\|α+β\| = \|α\| + \|β\|$	**2.** α , β ετερόσημοι
Γ. $\|α\| = \|β\|$	**3.** $α = β = 0$
Δ. $\|α+β\| = \big\|\,\|α\| - \|β\|\,\big\|$	**4.** α , β ομόσημοι
Ε. $\|α\| + \|β\| = α + β$	**5.** $α\ ,\ β \ge 0$

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	

230. Αν $\dfrac{χ|y| + y|χ|}{χy} = -2$, τότε
Α. $χy < 0$ **Β.** $χ>0>y$ **Γ.** $χ<0$ ή $y<0$ **Δ.** $χ<0$ και $y<0$ **Ε.** $χ>0$ και $y>0$

231. Αν $α > 0$ και $β < 0$ ποια από τις παρακάτω παραστάσεις είναι αρνητικός αριθμός
Α. $-|α|\cdot β$ **Β.** $-α\cdot β$ **Γ.** $|αβ|$ **Δ.** $-|β|\cdot α$ **Ε.** $|β|\cdot α$

232. Αν $χ < 0$ τότε
Α. $|χ| < 0$ **Β.** $-χ<0$ **Γ.** $χ < -χ$ **Δ.** $-χ < χ$ **Ε.** $χ - |χ| = 0$

233. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

	Απόλυτη τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
1.	$\lvert\chi-\chi_0\rvert<\delta$	$d(\chi,\chi_0)<\delta$	$(\chi_0-\delta\ ,\ \chi_0+\delta)$
2.	$\lvert\chi-3\rvert\le 2$	$d(\chi,3)\le 2$	$[1\ ,\ 5]$
3.	$\lvert\chi-\chi_0\rvert\ge\delta$	$d(\chi,\chi_0)\ge\delta$	$(-\infty\ ,\ \chi_0-\delta]\cup[\chi_0+\delta\ ,\ +\infty)$
4.	$\lvert\chi-1\rvert>4$	$d(\chi,1)>4$	$(-\infty\ ,\ -3)\cup(5\ ,\ +\infty)$
5.			$[2\ ,\ 4]$
6.	$\lvert\chi+2\rvert\ge 4$		
7.			$(-\infty\ ,\ 2)\cup(4\ ,\ +\infty)$
8.		$d(\chi\ ,\ -1)\ge 2$	
9.			$(1\ ,\ 5)$
10.		$d(\chi\ ,\ -2)<3$	
11.			$(-\infty\ ,-4]\cup[-2\ ,+\infty)$
12.	$\lvert\chi+2\rvert\le 3$		
13.			$[-1\ ,\ 5]$
14.		$d(\chi\ ,-2)\ge 1$	
15.			$(-\infty\ ,-2]\cup[6\ ,+\infty)$
16.	$\lvert\chi-4\rvert<3$		
17.			$(-3\ ,-1)$
18.		$d(\chi\ ,-3)<4$	
19.	$\lvert\chi-3\rvert>3$		
20.			$(-\infty\ ,\ -2)\cup(0\ ,\ +\infty)$
21.			$(-\infty\ ,\ 1]\cup[7\ ,\ +\infty)$
22.			$(-\infty\ ,-3)\cup(5\ ,+\infty)$
23.			$(-\infty\ ,-4)\cup(0\ ,+\infty)$
24.			$(-\infty\ ,\ 1]\cup[2\ ,\ +\infty)$

234. Αν $\alpha-2=\beta$ η τιμή της παράστασης $\lvert\alpha-\beta\rvert+\lvert\beta-\alpha\rvert$ είναι

Α. 0 **Β.** –2 **Γ.** 2 **Δ.** –4 **Ε.** 4

235. Αν $\chi<1$ τότε η παράσταση $\lvert\chi-1\rvert+\lvert\chi-2\rvert-\lvert\chi-3\rvert$ ισούται με :

Α. $2\chi-1$ **Β.** 3 **Γ.** $\chi-2$ **Δ.** $-\chi$ **Ε.** 0

236. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σω**στή (Σ)** ή Λάθος (**Λ**).

1.	Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.	**Σ**	**Λ**
2.	$\lvert\chi-3\rvert=\lvert 3-\chi\rvert$.	**Σ**	**Λ**
3.	$\lvert\chi-3\rvert=-\lvert 3-\chi\rvert$.	**Σ**	**Λ**
4.	$\lvert 3+\chi^2\rvert=3+\chi^2$.	**Σ**	**Λ**
5.	Αν $\lvert\chi\rvert>1$ τότε $\chi>1$ ή $\chi<-1$.	**Σ**	**Λ**
6.	Αν $\lvert\chi\rvert<2$ τότε $-2<\chi<2$.	**Σ**	**Λ**
7.	Αν $\lvert\chi\rvert\ge 3$ τότε $\chi\ge 3$ ή $\chi\le-3$.	**Σ**	**Λ**

8.	$\left\|3+\chi^2\right\| = \left\|\dfrac{1}{3+\chi^2}\right\|$	**Σ**	**Λ**
9.	$\|-3+2\| = \|-3\|+\|2\|$	**Σ**	**Λ**
10.	Αν α και β είναι αντίθετοι αριθμοί τότε $\|\alpha\| = \|\beta\|$.	**Σ**	**Λ**
11.	$\|\alpha\| \geq \alpha$.	**Σ**	**Λ**
12.	$\left\|\|\chi\|+3\right\| = \|\chi\|+3$.	**Σ**	**Λ**
13.	$\left\|\|\chi\|\right\| = \|\chi\|$.	**Σ**	**Λ**
14.	Αν $\chi \leq 5$, τότε $\|\chi-5\| = 5-\chi$.	**Σ**	**Λ**
15.	Αν $\|\chi\| > 4$ τότε $-4 < \chi < 4$.	**Σ**	**Λ**
16.	$\left\|\chi^2+1\right\| = \chi^2+1$.	**Σ**	**Λ**
17.	$\|\chi\| = \|-\chi\|$.	**Σ**	**Λ**
18.	Αν $\chi < 0 \Rightarrow \|\chi\| < 0$.	**Σ**	**Λ**
19.	Αν $-\chi < 0$ τότε $\|\chi\| = \chi$.	**Σ**	**Λ**
20.	$\|\chi-1\| = \|1-\chi\|$.	**Σ**	**Λ**
21.	Αν $\|\chi\| < 2 \Rightarrow \chi < 2$ και $\chi > -2$.	**Σ**	**Λ**
22.	$\|\chi-3\| = -\|3-\chi\|$.	**Σ**	**Λ**
23.	Αν $\chi < 2$ τότε $\|3-\chi\| = \chi-3$.	**Σ**	**Λ**
24.	Αν $\|-\chi\| = -\chi$ τότε $\chi < 0$.	**Σ**	**Λ**
25.	Η εξίσωση $\|\chi-1\|+5=0$ είναι αδύνατη.	**Σ**	**Λ**
26.	$\|\chi\| < \|y\| \Leftrightarrow \chi^2 < y^2$.	**Σ**	**Λ**
27.	$\|\chi\| > -3 \Leftrightarrow \chi < -3$ ή $\chi > 3$.	**Σ**	**Λ**
28.	$\|\chi-1\| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \chi \leq 3$.	**Σ**	**Λ**
29.	$\|\chi-2\| = d(\chi , -2)$.	**Σ**	**Λ**
30.	$d(\chi , 3) < 2 \Leftrightarrow 1 < \chi < 5$.	**Σ**	**Λ**
31.	$\chi < y < z \Rightarrow \|\chi+y-2z\| = \chi+y-2z$.	**Σ**	**Λ**
32.	$\chi+y = 0 \Rightarrow \|\chi\|=\|y\|$.	**Σ**	**Λ**
33.	Αν $\alpha < \beta$ τότε $\|\alpha\| < \|\beta\|$.	**Σ**	**Λ**
34.	$\|\alpha-\beta\| = \|\beta-\alpha\|$ για κάθε $\alpha , \beta \in \mathbf{R}$.	**Σ**	**Λ**
35.	$\|\chi-2\| - \|2-\chi\| = 0$.	**Σ**	**Λ**
36.	Αν $\chi > 2$ τότε $\|\chi-2\| + \|2-\chi\| = 0$.	**Σ**	**Λ**
37.	Αν $\|\chi\| = -\|\chi\|$ τότε $\chi = 0$.	**Σ**	**Λ**
38.	Ισχύει $\|\chi\| = \|y\| \Leftrightarrow \|\chi\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow \chi^2 = y^2$.	**Σ**	**Λ**
39.	Αν α , β είναι δύο αρνητικοί αριθμοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \|\alpha\| < \|\beta\|$	**Σ**	**Λ**
40.	Αν α , β είναι δύο θετικοί αριθμοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \|\alpha\| < \|\beta\|$	**Σ**	**Λ**
41.	Αν $\alpha < 0$ τότε : $\left\|\alpha - \|\alpha\| + \|\alpha\| + \alpha\right\| + 2\alpha = 0$.	**Σ**	**Λ**
42.	Αν $\chi < 1$ τότε : $\|\chi\| < 1$.	**Σ**	**Λ**
43	Αν $\chi \cdot y < 0$ και $\|\chi\| = \|y\|$ τότε $\chi + y = 0$.	**Σ**	**Λ**

237. 1) Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A=3|\alpha-\beta|+2|\beta-\gamma|-4|\gamma-\alpha|$. (Απ: $A=\alpha+\beta-2\gamma$)
2) Αν $|\chi| < 3$, να υπολογιστεί η παράσταση $B = |\chi-3|+|\chi+3|$. (Απ: $B=6$)
3) Αν $-3 < \chi < 1$ να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma = 2|\chi-1|+|\chi+3|-3|\chi+4|$. (Απ: $\Gamma=-4\chi-7$)
4) Αν $|\chi| < 1$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\Delta = |\chi-2|-|\chi+1|+|1-\chi|+3|\chi+2|$. (Απ: $\Delta=8$)
5) Αν $\chi \in (2 , 3)$, να υπολογιστεί η παράσταση $E = 2|\chi-1|-3|2-\chi|-|2\chi-1|+|3\chi-2|$. (Απ: $E=3$)
6) Αν $\chi \in (1 , 2)$, να απλοποιηθεί η παράσταση $Z = 3|1-\chi|-2|\chi-3|+|2\chi-1|-|5-2\chi|$. (Απ: $Z=9\chi-15$)
7) Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να υπολογιστεί η παράσταση $H = -|\alpha-\beta| + |\gamma-\alpha| - |\beta-\gamma|$. (Απ: $H=0$)
8) Αν $|\chi| < 1$ και $|y| > 1$, να υπολογιστεί η παράσταση $\Theta = \left|\chi^2-1\right| + \left|y^2-1\right| - \left|\chi^2-y^2\right|$. (Απ: $\Theta=2$)

238. Να βρείτε τους αριθμούς χ , $y \in \mathbf{Z}$, αν ισχύουν οι παρακάτω ισότητες :

α) $|\chi| = 3$ και $|\chi| + |y| = 5$ β) $\big||\chi| - |y|\big| = 0$ και $|y| = 2$

γ) $|\chi| + |y| = 0$ δ) $|\chi| + |y| = 1$

239. Αν $1 < \alpha < 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης
$A = |\alpha-1| - 3|\alpha| + |\alpha+1| - 4|5-\alpha|$. Στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση $A > \alpha-16$.

240. Να συμπληρώσετε τα κενά (τι συμπέρασμα βγάζετε για το χ) στις παρακάτω προτάσεις :

1.	$\chi < \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................	2.	$\chi = \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................
3.	$-\|\chi\| \le 0 \Leftrightarrow \chi$..................	4.	$-\|\chi\| < \chi \Leftrightarrow \chi$..................
5.	$-\chi < \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................	6.	$-\chi = \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................
7.	$-\|\chi\| \ge 0 \Leftrightarrow \chi$..................	8.	$-\|-\chi\| = \chi \Leftrightarrow \chi$..................
9.	$-\|\chi\| < 0 \Leftrightarrow \chi$..................	10.	$\|-\chi\| > 0 \Leftrightarrow \chi$..................
11.	$-\|\chi\| \ge \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................	12.	$-\|\chi\| \le \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................
13.	$\|-\chi\| \le 0 \Leftrightarrow \chi$..................	14.	$-\|\chi\| < \|\chi\| \Leftrightarrow \chi$..................

241. Αν $-1 < \chi < 0 < y < 1$ με $|\chi| > |y|$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα :

$0 , 1 , -1 , \chi , y , |\chi| , |y| , \frac{1}{\chi} , \frac{1}{y} , \left|\frac{1}{\chi}\right| , \left|\frac{1}{y}\right| , \chi^2 , y^2 , |-\chi| , |-y| , -|\chi| , -|y|$.

242. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω σχέσεις :

1.	Αν $1 < \chi < 3 \Rightarrow \ldots.. < \|\chi\| < \ldots..$	2.	Αν $-2 < \chi < -1 \Rightarrow \ldots.. < \|\chi\| < \ldots..$
3.	Αν $-2 \le \chi \le 3 \Rightarrow \ldots.. \le \|\chi\| \le \ldots..$	4.	Αν $-3 \le \chi \le 2 \Rightarrow \ldots.. \le \|\chi\| \le \ldots..$
5.	Αν $1 < \chi < 2 \Rightarrow \ldots.. < \left\|\frac{1}{\chi}\right\| < \ldots..$	6.	Αν $-3 < \chi < -2 \Rightarrow \ldots.. < \left\|\frac{1}{\chi}\right\| < \ldots..$
7.	Αν $\frac{1}{2} < \chi < 3 \Rightarrow \ldots.. < \left\|\frac{1}{\chi}\right\| < \ldots..$	8.	Αν $-2 \le \chi \le 3 \Rightarrow \ldots.. \le \|\chi\|^2 \le \ldots..$
9.	Αν $-\frac{1}{2} < \chi < 5 \overset{\chi \ne 0}{\Rightarrow} \ldots.. < \left\|\frac{1}{\chi}\right\| < \ldots..$		

243. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \big|\,\chi - |\chi|\,\big| + \big|\,\chi + |\chi|\,\big|$.

244. Να αποδείξετε ότι : $\chi^2 + |\chi y| + |-\chi| \cdot y + y \cdot |-y| = \big(|\chi| + |y|\big)\big(|\chi| + y\big)$

245. Αν $\alpha \cdot \beta \ne 0$ και ισχύει $\frac{|\beta|}{\alpha} - \frac{\beta}{|\alpha|} = 0$ να δειχθεί ότι α , β ομόσημοι.

246. Να γράψετε με μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα A , B , $A \cup B$, $A \cap B$.

1.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \|\chi\| \le 5\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \|\chi\| > 2\}$
2.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \|\chi\| \ge 3\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \|\chi\| < 6\}$
3.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid 2 \le \|\chi\| < 5\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid 1 < \|\chi\| \le 6\}$
4.	$A = \{\chi \in \mathbf{R} \mid 2 \le \|\chi\| < 3\}$, $B = \{\chi \in \mathbf{R} \mid \|\chi\| > 4\}$

5.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid 1<\lvert\chi\rvert\le 4\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert\ge 3\}$
6.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert\ge 1\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert> 2\}$
7.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert< 5\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert\ge 1\}$
8.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert> -2\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert\ge 1\}$
9.	$A=\{\chi\in\mathbf{R} \mid \lvert\chi\rvert< -1\}$, $B=\{\chi\in\mathbf{R} \mid 3\le\lvert\chi\rvert< 5\}$

247. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α) $A=\dfrac{\chi^2+4\lvert\chi\rvert+4}{\lvert\chi\rvert+2}$ β) $B=\dfrac{\chi^2+2\lvert\chi\rvert}{\lvert\chi\rvert+2}$ γ) $\Gamma=\dfrac{\lvert\chi\rvert^3+3\chi^2}{2\lvert\chi\rvert+6}$ δ) $\dfrac{\chi^2-1}{\lvert\chi\rvert+1}$

248. Να αποδείξετε ότι :

1.	$\lvert\alpha+1\rvert^2-4\alpha=\lvert\alpha-1\rvert^2$	2.	$\alpha^2-(\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert)(\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert)=\beta^2$
3.	$(\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert)(\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert)+2\beta(\alpha+\beta)=\lvert\alpha+\beta\rvert^2$	4.	$\lvert\alpha+2\beta\rvert^2+3(\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert)(\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert)=\lvert2\alpha+\beta\rvert^2$
5.	$\dfrac{3\lvert\alpha\rvert+\alpha^2}{3+\lvert\alpha\rvert}=\lvert\alpha\rvert$	6.	$\left(1+\dfrac{\lvert\alpha\rvert}{\alpha}\right)(\alpha-\lvert\alpha\rvert)=0$, για $\alpha\ne0$

249. Αν χ , y , α , $\beta\in\mathbf{R}^*$ να δείξετε ότι :

1.	$\alpha^2+\beta^2\ge2\lvert\alpha\beta\rvert$	2.	$\alpha^2+4\ge4\lvert\alpha\rvert$	3.	$\left\lvert\dfrac{\chi}{1+\chi^2}\right\rvert\le\dfrac{1}{2}$
4.	$\dfrac{4\chi^2+9}{12}\ge\lvert\chi\rvert$	5.	$\alpha\beta+\lvert\alpha\beta\rvert\ge\lvert\alpha\rvert\beta+\alpha\lvert\beta\rvert$	6.	$\lvert4\alpha\beta\rvert\le(\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert)^2\le2(\alpha^2+\beta^2)$
7.	$\left\lvert\chi+\dfrac{1}{\chi}\right\rvert\ge2$	8.	$\left\lvert\dfrac{\chi}{y}\right\rvert+\left\lvert\dfrac{y}{\chi}\right\rvert\ge2$	9.	$\left\lvert\dfrac{\chi}{\chi^2+4}\right\rvert\le\dfrac{1}{4}$
10.	$\left(\left\lvert\dfrac{\alpha}{\chi}\right\rvert+\left\lvert\dfrac{\beta}{y}\right\rvert\right)\left(\left\lvert\dfrac{\chi}{\alpha}\right\rvert+\left\lvert\dfrac{y}{\beta}\right\rvert\right)\ge4$	11.	$\lvert\chi\rvert-\lvert y\rvert\le\big\lvert\,\lvert\chi\rvert-\lvert y\rvert\,\big\rvert$	12.	$\lvert\chi-y\rvert\le\lvert\chi\rvert+\lvert y\rvert$

250. α) Αν $\left\lvert\dfrac{\alpha+16}{\alpha+1}\right\rvert=4$ να δείξετε ότι $\lvert\alpha\rvert=4$. β) Αν $\left\lvert\dfrac{2\chi+9}{\chi+2}\right\rvert=3$, δείξτε ότι $\lvert\chi\rvert=3$.

γ) Αποδείξτε ότι $\lvert2\chi-1\rvert=\lvert\chi-2\rvert \Leftrightarrow \lvert\chi\rvert=1$. δ) Αν $\lvert\alpha+9\rvert=3\lvert\alpha+1\rvert$ τότε $\lvert\alpha\rvert=3$.

251. Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις :

α) $A=\big\lvert\lvert\chi-1\rvert-\lvert1-\chi\rvert\big\rvert$ β) $(\chi\ne1)$, $B=\dfrac{\lvert2-\chi\rvert-\lvert\chi-2\rvert}{\lvert\chi-1\rvert}$

252. Αν $\chi\cdot y\cdot z\ne0$, να αποδειχθεί ότι : $\dfrac{\chi}{\lvert\chi\rvert}+\dfrac{y}{\lvert y\rvert}+\dfrac{z}{\lvert z\rvert}\le3$. $(\text{Υπόδειξη}: \chi\le\lvert\chi\rvert)$

253. α) Να αποδειχθεί ότι : $\lvert\kappa-\mu\rvert\le\lvert\kappa-\lambda\rvert+\lvert\lambda-\mu\rvert$.

β) Αν $\lvert\chi-y\rvert<\alpha$ και $\lvert y-z\rvert<\alpha$, να αποδειχθεί ότι : $\lvert\chi-z\rvert<2\alpha$.

254. Να αποδείξετε ότι : α) $\lvert\chi\rvert-\lvert y\rvert\le\big\lvert\,\lvert\chi\rvert-\lvert y\rvert\,\big\rvert$ β) $\lvert\chi-y\rvert\le\lvert\chi\rvert+\lvert y\rvert$

255. Αν α , $\beta \in \mathbf{R}$ και $-1<\alpha<1$ να δείξετε ότι : $|\alpha|\beta+|\beta|\geq|\alpha\beta|+\beta$.

256. Αν χ , $y \in \mathbf{R}^*$ και $\chi \neq \pm y$ να δείξετε ότι :

α) $\left|\dfrac{\chi}{\chi+y}\right|+\left|\dfrac{y}{\chi+y}\right|\geq 1$ β) $\dfrac{\left||\chi|-|y|\right|}{|\chi-y|}+\dfrac{|\chi+y|}{|\chi|+|y|}\leq 2$

257. α) Αν α , $\beta\in\mathbf{R}^*$ και $\alpha^2<16\beta^2$, δείξτε ότι : $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|-\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<\dfrac{15}{4}$.

β) Αν α , $\beta\in\mathbf{R}^*$ και $\left|\dfrac{5\alpha+16\beta}{4\alpha+20\beta}\right|<1$, δείξτε ότι : $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|-\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<\dfrac{15}{4}$.

258. Αν α , $\beta\in\mathbf{R}^*$ με $\dfrac{\left|\,\alpha|\beta|+\beta|\alpha|\,\right|}{|\alpha\beta|}=2$, δείξτε ότι α , β ομόσημοι.

259. Αν ο αριθμός χ **δεν ανήκει** στο διάστημα $[\alpha , \beta]$, να απλοποιηθεί η παράσταση $A=\left||\alpha-\chi|-|\beta-\chi|\right|$. (Απ: β–α)

260. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 2 και $\left|\chi-\dfrac{1}{\chi}\right|$.

α) Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας.

β) Να αποδείξετε ότι : $\left|\chi+\dfrac{1}{\chi}\right|\geq 2$.

261. Αν α , β , $\gamma\in\mathbf{R}$, χ , y , $z\in\mathbf{R}^*$ με $|5\alpha-4\beta|\leq\chi$, $|5\beta-4\gamma|\leq y$ και $|5\gamma-4\alpha|\leq z$, δείξτε ότι : $|\alpha+\beta+\gamma|\leq\chi+y+z$ $\left(\text{Υπόδειξη: } |\chi|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq\chi\leq\theta\right)$

262. Αν α , $\beta\in\mathbf{R}$, δείξτε ότι : $\dfrac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leq\dfrac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\leq\dfrac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\dfrac{|\beta|}{1+|\beta|}$.

263. Δίνεται η παράσταση $A=2-\dfrac{\chi^2+1-2\chi}{|1-\chi|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\chi\in\mathbf{R}$ ορίζεται η παράσταση Α.

β) Για $\chi>1$, να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

264. Για α , $\beta\in\mathbf{R}$ ισχύει ότι : $|\alpha-2|+|\alpha+2\beta-8|=0$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α , β.

β) Αν $\alpha<\chi<\beta$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A=|\chi-2|-|\chi-3|+|2\chi-7|$.

265. Δίνεται η παράσταση $A=\alpha^2+\beta^2-2|\alpha|-4|\beta|+5$, με $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

Γ1) Να αποδείξετε ότι : $A=\left(|\alpha|-1\right)^2+\left(|\beta|-2\right)^2$. (Μονάδες 8)

Γ2) Αν $A\leq 0$, τότε να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β. (Μονάδες 7)

Γ3) Να αποδείξετε ότι για κάθε χ , $y\in\mathbf{R}$ ισχύει : $\chi^2+y^2\geq\dfrac{(\chi+y)^2}{2}$. (Μονάδες 5)

Γ4) Να δείξετε ότι : $A\geq\dfrac{\left(|\alpha|+|\beta|-3\right)^2}{2}$. (Μονάδες 5)

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών – Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

1. Ορισμός

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}=\chi \iff \chi^\nu=\alpha \quad (\alpha\geq 0\,,\,\chi\geq 0\,,\,\nu\in\mathbb{N}^*)}$$

$$\sqrt{\alpha}=\chi \iff \chi^2=\alpha \quad ,(\alpha\geq 0\,,\,\chi\geq 0)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι αριθμοί που έχουν ακέραια τετραγωνική ρίζα είναι οι :

α	$\sqrt{\alpha}$	α	$\sqrt{\alpha}$
1	1	121	11
4	2	144	12
9	3	169	13
16	4	196	14
25	5	225	15
36	6	256	16
49	7	400	20
64	8	625	25
81	9	900	30
100	10	1600	40

Ενώ : $\sqrt{2}\simeq 1{,}41$, $\sqrt{3}\simeq 1{,}73$, $\sqrt{5}\simeq 2{,}23$, $\sqrt{6}\simeq 2{,}45$, $\sqrt{7}\simeq 2{,}64$, $\sqrt{10}\simeq 3{,}16$

2. Ιδιότητες (**όλα τα <u>υπόριζα</u> είναι <u>μη αρνητικά</u>**)

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\geq 0$ για κάθε $\alpha\geq 0$
2. $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$ και γενικά $\sqrt[2k]{\alpha^{2k}}=|\alpha|$ (2k: άρτιος αριθμός)
3. $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}=\alpha$
4. $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$
5. $\sqrt[\nu]{\alpha}>\sqrt[\nu]{\beta} \iff \alpha>\beta \quad (\alpha,\beta\geq 0)$
6. $\sqrt[\nu]{\alpha}<1 \iff 0\leq\alpha<1$
7. $\sqrt[\nu]{\alpha}>1 \iff \alpha>1$
8. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$
9. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
10. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$
11. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$
12, $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$
13. $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^k=\sqrt[\nu]{\alpha^k}$
14. $\boldsymbol{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$

3. Συζυγείς Παραστάσεις

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση υπάρχουν ριζικά στον παρονομαστή για να τον μετατρέψω σε ρητό τον πολλαπλασιάζω με τη συζυγή του παράσταση (και φυσικά πολλαπλασιάζω και τον αριθμητή) :

1.	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\alpha}$
2.	$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
3.	$\alpha+\sqrt{\beta}$	$\alpha-\sqrt{\beta}$
4.	$\sqrt[3]{\alpha}$	$\sqrt[3]{\alpha^2}$
5.	$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$	$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}$
6.	$\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$	$\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}$
7.	$\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$	$\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}$
8.	$\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}$	$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\beta^2}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-4}\beta^3}+\ldots+\sqrt[\nu]{\alpha\beta^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$

Παραδείγματα

1 . Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες : α) $\sqrt{256}$ β) $\sqrt{169}$ γ) $\sqrt{0,49}$ δ) $\sqrt{6400}$

Λύση :

α) $\sqrt{256}=16$ αφού $16\cdot 16=256$. β) α) $\sqrt{169}=13$ αφού $13\cdot 13=169$.

γ) $\sqrt{0,49}=0,7$ αφού $0,7\cdot 0,7=0,49$. δ) $\sqrt{6400}=80$ αφού $80\cdot 80=6400$.

2 . Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : α) $\sqrt{12}$ β) $\sqrt{48}$ γ) $\sqrt{72}$

Λύση :

α) Γράφουμε τον αριθμό 12 ως **γινόμενο** δύο αριθμών ώστε ο ένας από τους δύο να έχει ακέραια τετραγωνική ρίζα όσο το δυνατό μεγαλύτερη.

$$\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 4}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}.$$

β) <u>1ος Τρόπος</u> :

$$\sqrt{48}=\sqrt{6\cdot 8}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{2\cdot 4}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=2\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}=2\cdot 2\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

<u>2ος Τρόπος</u> :

$$\sqrt{48}=\sqrt{4\cdot 12}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}=2\cdot\sqrt{3\cdot 4}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=2\cdot\sqrt{3}\cdot 2=4\sqrt{3}$$

<u>3ος Τρόπος</u> :

$$\sqrt{48}=\sqrt{3\cdot 16}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{3}\cdot 4=4\sqrt{3}$$

γ) <u>1ος Τρόπος</u> :

$$\sqrt{72}=\sqrt{8\cdot 9}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{2\cdot 4}\cdot 3=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}\cdot 3=\sqrt{2}\cdot 2\cdot 3=6\sqrt{2}$$

<u>2ος Τρόπος</u> :

$$\sqrt{72}=\sqrt{2\cdot 36}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36}=\sqrt{2}\cdot 6=6\cdot\sqrt{2}$$

3 . Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή :

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ γ) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x>0$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

Λύση :

α) Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με $\sqrt{2}$. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

β) Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με $\sqrt{3}$. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

γ) Για $x>0$, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt[5]{x^3}$.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=\frac{1\cdot\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}}=\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2\cdot x^3}}=\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}.$$

δ) Για $x\geq 0$ και $x\neq 2$, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{x}-\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}.$$

Ασκήσεις

266. Αν $\chi = \sqrt{\alpha}$ με $\alpha > 0$, τότε ισχύει :

Α. $\alpha^2 = \chi$ **Β.** $\chi^2 = -\alpha$ **Γ.** $\alpha = \chi^2$ **Δ.** $\alpha = \chi^{1/2}$ **Ε.** $\alpha^2 = -\chi$

267. Αν μ , ν είναι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2 και α , β ≥ 0 , τότε σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες έχουμε :

$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} =$ $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} =$ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} =$

268. Η ισότητα $\chi + 1 + \sqrt{(\chi-1)^2} = 2\chi$ είναι σωστή αν:

Α. $\chi > -1$ **Β.** $\chi \geq 1$ **Γ.** $\chi < 1$ **Δ.** $\chi \leq 1$ **Ε.** $\chi \in \mathbf{R}$ (οποιοσδήποτε αριθμός)

269. Αντιστοιχίστε κάθε παράσταση της στήλης (Α) με την ισοδύναμή της στη στήλη (Β):

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
Α. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{10+\sqrt{36}}}}$	**1.** $\frac{1}{2}$
Β. $\sqrt{9\sqrt{9\sqrt{27\sqrt{9}}}}$	**2.** $\frac{1}{3}$
Γ. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}\sqrt{1+\frac{1}{3}}}$	**3.** 2
	4. 3
	5. 9
Δ. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2\sqrt{4}}}}$	**6.** $\sqrt[4]{2}$
Ε. $\sqrt{2\sqrt[4]{2\sqrt{4}}}$	**7.** $\sqrt[4]{2^3}$

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	

270. Αν $\chi = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, τότε η τιμή της παράστασης $\sqrt{36\chi^4 + 12\chi^2 + 1}$ είναι:

Α. – 6 **Β.** 6 **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** 4

271. Αν $1 \leq \chi \leq 2$, τότε η τιμή της παράστασης $\sqrt{(\chi-1)^2} + \sqrt{(\chi-2)^2}$ ισούται με:

Α. 3 **Β.** – 3 **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** 1

272. Αν $\chi , y \in \mathbf{R}$ και $\sqrt{(\chi+1)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 0$, τότε ισχύει:

Α. $\chi = -1$ και $y = 3$ **Β.** $\chi = 0$ και $y = 3$ **Γ.** $\chi = -1$ και $y = -3$

Δ. $\chi = 2$ και $y = -2$ **Ε.** $\chi = 1$ και $y = 3$

273. Τι ενέργεια θα πρέπει να εφαρμόσουμε στο $\sqrt{10}$ για να προκύψει το $\sqrt{90}$;

Α. να το εννεαπλασιάσουμε **Β.** να το τριπλασιάσουμε

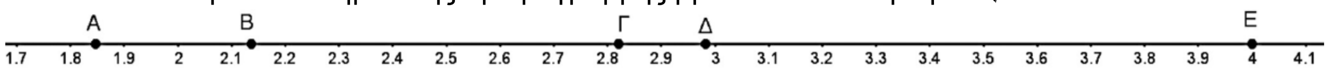
Γ. να του προσθέσουμε το $\sqrt{80}$ **Δ.** να το υψώσουμε στο τετράγωνο

274. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σωστή **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

1.	Για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$ ισχύει : $\sqrt[4]{\chi^6} = \chi^2$.	**Σ**	**Λ**
2.	Για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$ ισχύει : $\sqrt[6]{\chi^{18}} = \chi^3$.	**Σ**	**Λ**
3.	Για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$ ισχύει : $\sqrt[3]{\chi^6} = \chi^2$.	**Σ**	**Λ**
4.	Για κάθε $\chi \in \mathbf{R}$ ισχύει : $\dfrac{\sqrt{\chi^2}}{\chi} = 1$.	**Σ**	**Λ**
5.	Για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό χ ισχύει : $\sqrt{\chi^2} = \chi$.	**Σ**	**Λ**

6.	Ισχύει : $\sqrt{-25}=-5$.	**Σ**	**Λ**
7.	Για κάθε $\chi\in\mathbf{R}$ ισχύει : $\sqrt[4]{\sqrt{\chi^2}}=\sqrt[4]{\chi}$.	**Σ**	**Λ**
8.	Το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι $\sqrt{10}$.	**Σ**	**Λ**
9.	Το μισό του $\sqrt{12}$ είναι $\sqrt{3}$.	**Σ**	**Λ**
10.	Το μισό του $\sqrt{20}$ είναι $\sqrt{10}$.	**Σ**	**Λ**
11.	Το διπλάσιο του $\sqrt{10}$ είναι $\sqrt{40}$.	**Σ**	**Λ**
12.	Το $\sqrt{8}$ είναι διπλάσιο του $\sqrt{2}$.	**Σ**	**Λ**
12.	Ισχύει : $2\cdot 8^{\frac{2}{3}}=8$.	**Σ**	**Λ**
13.	Αν $\chi=\sqrt{5}$ τότε $\chi^2=5$.	**Σ**	**Λ**
14.	Αν $\chi^2=25$ τότε $\chi=5$ ή $\chi=-5$.	**Σ**	**Λ**
15.	Ισχύει $\sqrt{(-4)^2}=4$.	**Σ**	**Λ**
16.	Ισχύει $-\sqrt{256}=-16$.	**Σ**	**Λ**
17.	Ισχύει $\sqrt{9+16}=5$.	**Σ**	**Λ**
18.	Ισχύει $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$.	**Σ**	**Λ**
19.	Ισχύει $\sqrt{4\cdot 16}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}$.	**Σ**	**Λ**
20.	Ισχύει $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\dfrac{9}{16}}$.	**Σ**	**Λ**
21.	Επειδή $3^2=9$ άρα ισχύει $\sqrt{9}=3$	**Σ**	**Λ**
22.	Επειδή $(-2)^2=4$ άρα ισχύει $\sqrt{4}=-2$.	**Σ**	**Λ**
23.	Ισχύει $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$.	**Σ**	**Λ**
24.	Ισχύει $\sqrt{(-3)^2}=-3$.	**Σ**	**Λ**
25.	Αν $\alpha\geq 0$ τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$.	**Σ**	**Λ**
26.	Ισχύει $\sqrt{\alpha^4}=\alpha^2$.	**Σ**	**Λ**
27.	Ισχύει $\sqrt{(-\alpha)^2}=-\alpha$.	**Σ**	**Λ**
28.	Ισχύει $3\sqrt{3}=9$.	**Σ**	**Λ**
29.	Ισχύει $\sqrt{\alpha^2}=\lvert\alpha\rvert$.	**Σ**	**Λ**
30.	Ισχύει $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$.	**Σ**	**Λ**
31.	Αν $\alpha>0$, τότε $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha}}=\sqrt[6]{\alpha}$.	**Σ**	**Λ**
32.	Για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$ ισχύει $\sqrt[8]{\alpha^4}=\sqrt{\alpha}$.	**Σ**	**Λ**
33.	Αν $\alpha\geq 0$, τότε $\alpha^{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\alpha^4}$.	**Σ**	**Λ**

275. Ποιο από τα παρακάτω σημεία της αριθμογραμμής βρίσκεται στον αριθμό $\sqrt{8}$:



276. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

1.	$\sqrt{49}$	2.	$\sqrt{0{,}04}$	3.	$\sqrt{8100}$	4.	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$
5.	$\left(\sqrt{3}\right)^2$	6.	$\sqrt{\dfrac{64}{36}}$	7.	$\sqrt{36}\cdot\sqrt{64}$	8.	$\sqrt{36\cdot 64}$
9.	$\sqrt{(-5)^2}$	10.	$\sqrt{2^6}$	11.	$\sqrt{\sqrt{81}}$	12.	$\sqrt{3+\sqrt{36}}$

13.	$\sqrt{9-\sqrt{25}}$	14.	$\sqrt{4\cdot\sqrt{81}}$	15.	$\sqrt{\frac{20}{\sqrt{25}}}$	16.	$\sqrt{3^4}$
17.	$\sqrt{\sqrt{625}}$	18.	$\sqrt{150-\sqrt{36}}$	19.	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$	20.	$\sqrt{9+\sqrt{49}}$
21.	$\sqrt{49}\cdot\sqrt{16}$	22.	$\sqrt{(-7)^2}$	23.	$\sqrt{8\cdot\sqrt{64}}$	24.	$\sqrt{\frac{48}{3}}$
25.	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$	26.	$\sqrt{144}-\sqrt{121}$	27.	$\sqrt{0{,}0009}$	28.	$\sqrt{\frac{49}{9}}$
29.	$\sqrt{169}$	30.	$\sqrt{160000}$	31.	$\sqrt{4900}$	32.	$\frac{\sqrt{100}}{5}$
33.	$\frac{\sqrt{100-64}}{\sqrt{36}}$	34.	$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$	35.	$\sqrt{3\cdot 12}$	36.	$\sqrt{2\cdot\sqrt{4}\cdot 4}$
37.	$\sqrt{6\cdot\sqrt{36}}$	38.	$\sqrt{20\cdot\sqrt{25}}$	39.	$\sqrt{3^2+4^2}$	40.	$\sqrt{13^2-12^2}$
41.	$\sqrt{8+\sqrt{8^2}}$	42.	$\sqrt{4\sqrt{4}-\sqrt{16}}$	43.	$\sqrt{2^{10}}$	44.	$\sqrt{3^6}$
45.	$\sqrt[3]{5^6}$	46.	$\sqrt[4]{6^8}$	47.	$\sqrt[5]{2^{15}}$	48.	$\sqrt[6]{2^5}\cdot\sqrt[6]{2^{13}}$
49.	$\sqrt[4]{3^5}\cdot\sqrt[4]{3^3}$	50.	$\frac{\sqrt[3]{2^{16}}}{\sqrt[3]{2^4}}$	51.	$\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^4}\cdot\sqrt[5]{2^8}$	52.	$\sqrt{2^4\cdot 3^2}$
53.	$\sqrt[3]{3^6\cdot 5^3}$	54.	$\sqrt{2^6\cdot 3^4}$	55.	$\sqrt[4]{3^{12}\cdot 2^8}$	56.	$36^{\frac{1}{2}}$
57.	$16^{\frac{1}{4}}$	58.	$8^{\frac{2}{3}}$	59.	$9^{\frac{3}{2}}$	60.	$4^{\frac{5}{2}}$
61.	$4^{\frac{5}{6}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}$	62.	$49^{\frac{1}{6}}\cdot 49^{\frac{1}{3}}$	63.	$\frac{27^{\frac{3}{4}}}{27^{\frac{1}{12}}}$	64.	$\frac{\sqrt[5]{6^9}\cdot\sqrt[5]{6^7}}{\sqrt[5]{6^6}}$
65.	$\frac{8^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{14}{15}}}{8^{\frac{1}{5}}\cdot 8^{\frac{1}{15}}}$	66.	$\frac{\sqrt[3]{2^7}\cdot\sqrt[3]{2^{13}}}{\sqrt[3]{2^4}\cdot\sqrt[3]{2}}$	67.	$\left(8^{\frac{8}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$	68.	$\left(9^{\frac{15}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(9^{\frac{3}{20}}\right)^{\frac{5}{3}}$
69.	$\frac{\left(4^{\frac{39}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(4^{\frac{27}{28}}\right)^{\frac{7}{9}}}$	70.	$\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(18^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{7}}$	71.	$\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}}+\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$	72.	$\sqrt{\left(15-\sqrt{\frac{20}{5}}\right)^2}$
73.	$\sqrt{\frac{49\sqrt{16}}{14^2}}$	74.	$\sqrt{\frac{\sqrt{9}}{9}+\frac{2}{3}}$	75.	$\sqrt{\frac{\sqrt{900}-\sqrt{400}}{10}}$	76.	$\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2-\left(\frac{4}{9}\right)^2}$
77.	$\sqrt[3]{4^{\frac{13}{4}}}\cdot\sqrt{4^{\frac{17}{6}}}$	78.	$\left(\sqrt[4]{8^3}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}$	79.	$\sqrt{\sqrt[3]{2^5}}\cdot\sqrt[6]{2}$	80.	$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{6^{11}}}}{\sqrt[8]{6^3}}$
81.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^5}}\cdot\sqrt[12]{3^7}$	82.	$\sqrt{\sqrt[6]{5^{13}}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^{11}}}$	83.	$\sqrt[3]{\sqrt[6]{3^{23}}}\cdot\sqrt{\sqrt[9]{3^{13}}}$	84.	$\frac{\sqrt[8]{\sqrt{4^{17}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4^5}}}$
85.	$\sqrt[3]{\sqrt{2^9}}\cdot\sqrt{2}$	86.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^2}}\cdot\sqrt[6]{3^5}$	87.	$\frac{\sqrt[5]{\sqrt{7^{15}}}}{\sqrt{7}}$	88.	$\sqrt[10]{\sqrt[3]{4^5}}\cdot\sqrt[6]{4^{11}}$
89.	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^9}}\cdot\sqrt[5]{4}$	90.	$\sqrt[6]{\sqrt[5]{5^9}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[4]{5^{14}}}$	91.	$\sqrt{2^{2^4}}$	92.	$\sqrt{2^{2^{2004}}}$

277. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις :

1.	$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$	2.	$\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2^4}\cdot\sqrt{2^3}$	3.	$\sqrt[3]{7^2}\cdot\sqrt[4]{7^3}\cdot\sqrt[12]{7^7}$

4.	$\dfrac{\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}}$	5.	$\sqrt[10]{2^5}\cdot\sqrt[6]{18^3}$	6.	$\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-3\right)^4}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}+3\right)^6}$
7.	$\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(\sqrt{5}+1\right)^3}$	8.	$\sqrt{8^9+4^{12}}$	9.	$\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{12}\right)^6}$
10.	$\sqrt{16^5-2^{19}+4^8}$	11.	$\sqrt[3]{3^{11}-27^3}$	12.	$\sqrt{\dfrac{2^{43}+4^{21}+8^{13}}{4^{19}+2^{35}}}$

171. Στις παρακάτω ισότητες να υπολογίσετε το $x>0$:

1.	$\sqrt{\dfrac{4}{x}}=\dfrac{2}{3}$	2.	$\sqrt{x}^2=5$	3.	$\sqrt{x+3}=6$
4.	$\sqrt{x}+2=11$	5.	$\dfrac{\sqrt{x}}{3}=\dfrac{5}{6}$	6.	$\sqrt{x}+3=7$
7.	$\sqrt{2+\sqrt{x}}=2$	8.	$\sqrt{x}-2=1$	9.	$\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$
10.	$\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}=1$	11.	$\sqrt{x-5}=3$	12.	$\sqrt{7+\sqrt{x}}=4$
13.	$\sqrt{x}-3=2$	14.	$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$	15.	$\sqrt{x}+2=6$
16.	$\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{2}=1$	17.	$\sqrt{x-3}=4$	18.	$\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=2$
19.	$\sqrt{8-\sqrt{x}}=2$	20.	$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=3$	21.	$\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$
22.	$\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{4}=\dfrac{1}{2}$	23.	$\sqrt{\sqrt{x}}=3$	24.	$\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}=1$
25.	$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}$	26.	$\dfrac{\sqrt{x}}{6}=\dfrac{1}{2}$	27.	$\dfrac{\sqrt{x}}{2}-1=\dfrac{3}{2}$
28.	$\dfrac{10}{\sqrt{x}+1}=2$	29.	$\sqrt{27+x}=6$	30.	$\sqrt{25}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{4}\right)^2$
31.	$\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=2$				

172. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις :

1.	$\left(\left(\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$	2.	$27^{-\frac{4}{3}}\cdot 8^{\frac{4}{3}}$	3.	$\left(64^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

173. Ο κήπος στο σπίτι μας στο χωριό είναι τετράγωνος και έχει εμβαδόν 1 στρέμμα. Πόσα μέτρα είναι η κάθε πλευρά του κήπου αν ένα στρέμμα ισοδυναμεί με 1000 m^2 ; $\left(\text{Δίνεται : } \sqrt{10}=3{,}16\right)$.

174. Να συμπληρωθούν με τα σύμβολα $<$ ή $>$, οι παρακάτω σχέσεις :

1.	$1<x<9 \Rightarrow$ ....$\sqrt{x}$........x..........x^2..........	2.	$\dfrac{1}{9}<x<\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ ....$\sqrt{x}$........x..........x^2..........
3.	$0<x<y<1 \Rightarrow$ ....$\sqrt{x}$........$\sqrt{y}$..........	4.	$1<x<y \Rightarrow$ ....$\sqrt{x}$........$\sqrt{y}$..........
5.	$4>x>2 \Rightarrow$ ....$\sqrt{x}$........x..........x^2..........	6.	$\dfrac{1}{4}>x>\dfrac{1}{16} \Rightarrow$ ....$\sqrt{x}$........x..........x^2..........

175. Αν $\alpha > 1$ να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές :

$1 \;,\; \dfrac{1}{\alpha} \;,\; \alpha^{\frac{1}{2}} \;,\; \dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}} \;,\; \sqrt[4]{\alpha} \;,\; \sqrt[6]{\alpha} \;,\; \alpha \;,\; \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \;,\; \sqrt[3]{\alpha^2}$

176. Για $\chi \in \mathbf{R}$ ισχύει ότι $\chi > 1$. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς :

$\chi \,,\, \chi^2 \,,\, \chi^3 \,,\, \chi^4 \,,\, \dfrac{1}{\chi} \,,\, \dfrac{1}{\chi^2} \,,\, \dfrac{1}{\chi^3} \,,\, \dfrac{1}{\chi^4} \,,\, \sqrt{\chi} \,,\, \sqrt[3]{\chi} \,,\, \sqrt[4]{\chi} \,,\, \sqrt{\dfrac{1}{\chi}} \,,\, \sqrt[3]{\dfrac{1}{\chi}} \,,\, \sqrt[4]{\dfrac{1}{\chi}} \,,\, 1.$

177. Για $\chi \in \mathbf{R}$ ισχύει ότι $0 < \chi < 1$. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς : $\chi \,,\, \chi^2 \,,\, \chi^3 \,,\, \chi^4 \,,\, \dfrac{1}{\chi} \,,\, \dfrac{1}{\chi^2} \,,\, \dfrac{1}{\chi^3} \,,\, \dfrac{1}{\chi^4} \,,\, \sqrt{\chi} \,,\, \sqrt[3]{\chi} \,,\, \sqrt[4]{\chi} \,,\, \sqrt{\dfrac{1}{\chi}} \,,\, \sqrt[3]{\dfrac{1}{\chi}} \,,\, \sqrt[4]{\dfrac{1}{\chi}} \,,\, 1.$

178. Για $\alpha \,,\, \beta \in \mathbf{R}$ ισχύει ότι $0 < \alpha < 1 < \beta$. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς : $\alpha \,,\, \alpha^2 \,,\, \alpha^3 \,,\, \sqrt{\alpha} \,,\, \sqrt[3]{\alpha} \,,\, \beta \,,\, \beta^2 \,,\, \beta^3 \,,\, \sqrt{\beta} \,,\, \sqrt[3]{\beta} \,,\, 1.$

179. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι σχέσεις :

1.	$\sqrt{\chi^2} = -\chi$	2.	$\sqrt{\chi^2} \le \chi$	3.	$\sqrt{\chi} > \chi$	4.	$\sqrt{(\chi y)^2} = -\chi y$
5.	$\sqrt{\chi^2} \le -\chi$	6.	$\sqrt{\chi^2} \ge -\chi$	7.	$\sqrt{\chi^2 y^2} \le \chi y$	8.	$\sqrt{(\chi y)^2} \ge -\chi y$

180. Αν χ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	$\sqrt{(2\chi)^2}$	2.	$\sqrt{(-20)^2}$	3.	$\sqrt{\dfrac{\chi^4}{9}}$	4.	$\sqrt[4]{\chi^6}$
5.	$\sqrt[6]{\chi^{18}}$	6.	$\sqrt[3]{\chi^6}$	7.	$\dfrac{\sqrt{\chi^2}}{\chi} \;,\; \chi \neq 0$		

181. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις $(\alpha \,,\, \beta \,,\, \chi \,,\, y \ge 0)$:

1.	$5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$	2.	$3\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$
3.	$3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - \sqrt{18}$	4.	$2\sqrt{2} + \sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$
5.	$\sqrt{2} + 3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} - 2\sqrt{2}$	6.	$4\sqrt{20} - \sqrt{5} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500} - \sqrt{45}$
7.	$2\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$	8.	$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{54}$
9.	$\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)$	10.	$3\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{243} + \sqrt{27}$
11.	$\sqrt{27} - \sqrt{3} - 2\sqrt{243} + 3\sqrt{147} - \sqrt{12} - \sqrt{3}$	12.	$\sqrt{5} + \sqrt{45} - 2\sqrt{125} + \sqrt{75} + \sqrt{20}$
13.	$\sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$	14.	$\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63} + 2\sqrt{7}$
15.	$\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{54} - 2\sqrt{6}$	16.	$\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{2}$
17.	$\sqrt{24} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{6} - \sqrt{40}$	18.	$\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$
19.	$3\sqrt{150} - \sqrt{96} - \sqrt{160} + \sqrt{40} - 2\sqrt{54} + \sqrt{24}$	20.	$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)$
21.	$\left(2\sqrt{3} + 5\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)$	22.	$\left(4 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 4\right)$
23.	$\sqrt{2}\left(\sqrt{8} - 2\sqrt{2} + \sqrt{18}\right)$	24.	$\sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1\right)$
25.	$\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{27}\right)\sqrt{3}$	26.	$\left(\sqrt{5} + \sqrt{45} - 2\sqrt{125}\right)\sqrt{5}$
27.	$\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right) : \sqrt{2}$	28.	$\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}} + \sqrt{40}$
29.	$3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} : 4$	30.	$5\sqrt{18} \cdot 3\sqrt{8}$

31.	$\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$	32.	$\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{27}}+\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{12}}$
33.	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$	34.	$\left(\sqrt{7}-5\right)^2$
35.	$\left(2\sqrt{3}+5\right)^2$	36.	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2$
37.	$\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{y}\right)$	38.	$\left(2\sqrt{\beta}+3\sqrt{\alpha}\right)\left(3\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}\right)$
39.	$\sqrt{45\alpha^3}-\sqrt{5\alpha^3}+\alpha\sqrt{80\alpha}$	40.	$\sqrt{16\chi^3}-2\chi\sqrt{9\chi}+3\sqrt{4\chi^3}-\chi\sqrt{\chi}$
41.	$\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$	42.	$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-3}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-3}$
43.	$\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{11}}$	44.	$\sqrt{\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)}\sqrt{\alpha-\beta}$, $\alpha\geq\beta>0$
45.	$\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{15}}$	46.	$\sqrt{\left(\sqrt{10}+1\right)^2-\sqrt{160}}\cdot\left(\sqrt{10}+1\right)$
47.	$\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}\cdot\sqrt[3]{3}$	48.	$\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(2\sqrt{2}+3\right)$
49.	$\left[\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right]\left(\sqrt{5}-1\right)$	50.	$\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{15}-1\right)^2+\sqrt[4]{81}}$
51.	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}$	52.	$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$
53.	$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)\sqrt{15}$	54.	$\sqrt[3]{\left[\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)^2-14\right]:\sqrt{3}}$
55.	$\sqrt{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	56.	$\sqrt{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$
57.	$\sqrt[3]{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2\left(7-2\sqrt{10}\right)}$	58.	$\sqrt[3]{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}-3}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}+3}$
59.	$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)(\alpha-\beta)+\beta^2$	60.	$\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{\chi y}-1\right)^2$
61.	$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}}{\sqrt{72}-\sqrt{8}}$	62.	$\sqrt{\left(\sqrt{12}+\sqrt{48}\right)\left(\sqrt{75}-\sqrt{27}\right)}$
63.	$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	64.	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$
65.	$\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}}+\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}}$	66.	$\sqrt{\frac{(1+\sqrt{7})^2}{9}}+\sqrt{\frac{(1-\sqrt{7})^2}{9}}$
67.	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$	68.	$\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}-\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2+1}}-\frac{2}{\sqrt{\alpha^4-1}}$, $\alpha>1$
69.	$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\beta}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$	70.	$\frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-(\sqrt{\alpha\beta}+1)^2}{(\alpha-1)(\beta-1)}$
71.	$\sqrt[3]{9\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+2}}$	72.	$\left(\sqrt{5}+4\right)\left(\sqrt{5}-4\right)-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$
73.	$\sqrt{2}\sqrt{8}-\sqrt{50}\sqrt{200}+\sqrt{\frac{49}{8}}\sqrt{2^3}-\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$	74.	$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}-\sqrt{108}}{2\sqrt{3}}$
75.	$2\sqrt{50}-4\sqrt{27}+5\sqrt{72}-3\sqrt{75}-40\sqrt{2}+27\sqrt{3}$		

Απαντήσεις :

1.	$\sqrt{2}$	2.	$\sqrt{2}+2\sqrt{3}$	3.	$4\sqrt{2}$	4.	$2\sqrt{2}$
5.	$\sqrt{2}$	6.	$4\sqrt{5}$	7.	$-\sqrt{3}$	8.	0

9.	$2\sqrt{6}$	10.	$\sqrt{2}$	11.	$3\sqrt{3}$	12.	$-\sqrt{5}$
13.	$\sqrt{2}$	14.	$2\sqrt{7}$	15.	$4\sqrt{6}$	16.	$10\sqrt{2}$
17.	0	18.	$15\sqrt{3}+2\sqrt{5}$	19.	$7\sqrt{6}-2\sqrt{10}$	20.	-1
21.	$9\sqrt{3}+16$	22.	-14	23.	6	24.	$6+\sqrt{3}$
25.	6	26.	-30	27.	2	28.	$3\sqrt{10}$
29.	9	30.	180	31.	$-2\sqrt{2}$	32.	3
33.	$5-2\sqrt{6}$	34.	$32-10\sqrt{7}$	35.	$37+20\sqrt{3}$	36.	$6-2\sqrt{5}$
37.	$\chi-y$	38.	$9\alpha-4\beta$	39.	$6\alpha\sqrt{5\alpha}$	40.	$3\chi\sqrt{\chi}$
41.	$\frac{4\sqrt{2}}{5}$	42.	52	43.	2	44.	$\alpha-\beta$
45.	2	46.		47.	3	48.	1
49.		50.		51.		52.	
53.		54.		55.		56.	
57.		58.		59.		60.	
61.		62.		63.	2	64.	6
65.	$\sqrt{5}$	66.	$2\sqrt{7}/3$	67.	1	68.	0
69.		70.		71.		72.	-14
73.	-91	74.	-1	75.	0		

182. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις (α , $\beta > 0$) :

1.	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha}$	2.	$\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[6]{\alpha}$	3.	$\sqrt{3\sqrt{3}}$
4.	$\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$	5.	$\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[15]{\alpha^4}$	6.	$\sqrt[12]{\alpha^5}:\sqrt[4]{\alpha}$
7.	$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$	8.	$\sqrt[9]{\alpha^8}:\sqrt[6]{\alpha^5}$	9.	$\sqrt[15]{3^{10}}:\sqrt[10]{3^3}$
10.	$\sqrt[3]{\sqrt{\alpha}}\cdot\sqrt[9]{\alpha}$	11.	$\sqrt[6]{\alpha}\cdot\sqrt{\sqrt[4]{\alpha}}$	12.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{\alpha}}$
13.	$\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[20]{\alpha^3}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2}$	14.	$\sqrt[4]{16\cdot\alpha^4\beta^8}$	15.	$\sqrt{108\cdot\alpha^5\beta^{12}}$
16.	$\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^3}}$	17.	$\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha^5}$	18.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^5}}\cdot\sqrt[4]{\alpha^7}$
19.	$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	20.	$\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^{13}}}$	21.	$\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}}$
22.	$\sqrt[4]{\alpha\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt{\alpha}}}$	23.	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^6\sqrt{\alpha^3}}}$	24.	$\sqrt[5]{\sqrt[6]{\alpha^4}\cdot\sqrt[3]{\alpha^8}}$
25.	$\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$	26.	$\sqrt[6]{\alpha}\cdot\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2}$	27.	$\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}\cdot\sqrt[12]{5^6}$
28.	$\sqrt{\alpha^4\cdot\sqrt[4]{\alpha\cdot\sqrt[3]{\alpha^5}}}$	29.	$\sqrt[3]{\alpha\cdot\sqrt[5]{\alpha\cdot\sqrt{\alpha^3}}}$	30.	$\sqrt[7]{\alpha^4\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\sqrt[4]{\alpha^7}}}$
31.	$\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^4\cdot\sqrt[4]{\alpha^3\cdot\sqrt[3]{\alpha}}}}$	32.	$\sqrt{\frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{\alpha}}$	33.	$\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}$
34.	$\sqrt[4]{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}}$	35.	$\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}}}$	36.	$\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\sqrt{\alpha^4\cdot\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}}$
37.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^3\sqrt{\alpha^9}}}$	38.	$\sqrt{\alpha\beta\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta}}$	39.	$\sqrt[3]{\alpha^3\cdot\sqrt{\beta^3}}$
40.	$\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt{\beta^3\sqrt{\alpha^7\beta^3}}}$	41.	$\sqrt[4]{\alpha^2\beta\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta^5}}$	42.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha\beta^4\cdot\sqrt[5]{\alpha^7}}}$
43.	$\sqrt{\alpha^3\cdot\sqrt[4]{\beta^2\cdot\sqrt[3]{\beta^2\alpha^4}}}$	44.	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}}$	45.	$\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}}$

46.	$\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{\beta^3}{\alpha^4}}}$	47.	$\sqrt[3]{\alpha^4\beta^5\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}$	48.	$\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2\beta}\cdot\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}}$
49.	$\sqrt{\frac{1}{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\beta}\cdot\sqrt{\alpha^6\beta^5}}}$	50.	$\sqrt[3]{\alpha^2\beta^3\cdot\sqrt{\alpha^5\cdot\beta^6}}$	51.	$\sqrt{\alpha^3\beta\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\beta^3\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta^4}}}$
52.	$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^2\sqrt{2^5}}}$	53.	$\sqrt{\alpha^3\cdot\sqrt[4]{\alpha^3\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}}}\cdot\sqrt[24]{\alpha}$	54.	$\sqrt[3]{\alpha\cdot\sqrt[3]{\alpha^4\cdot\sqrt[4]{\alpha^5}}}\cdot\sqrt[12]{\alpha}$
55.	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^3}}}}$	56.	$\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^2}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}}}$	57.	$\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}}\cdot\sqrt[8]{\frac{\beta}{\alpha}}$
58.	$\sqrt{\alpha\cdot\sqrt[3]{\alpha^4\cdot\sqrt[4]{\alpha^2}}}\cdot\sqrt[4]{\alpha^3}$	59.	$\sqrt[4]{\alpha^3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\sqrt{\alpha}}}\cdot\sqrt[8]{\alpha^3}$		

183. Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή :

1.	$\sqrt{\frac{2}{9}}$	2.	$\frac{1}{\sqrt2}$	3.	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt5}$	4.	$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt3}$
5.	$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$	6.	$\frac{2}{\sqrt6}$	7.	$\frac{1}{\sqrt3}$	8.	$\frac{5}{2\sqrt2}$
9.	$\frac{15}{\sqrt3}$	10.	$\frac{\sqrt5}{\sqrt{20}}$	11.	$\frac{2\sqrt3}{\sqrt{75}}$	12.	$\frac{1}{2\sqrt6}-\frac{3}{\sqrt{24}}+\frac{2}{\sqrt6}$
13.	$\frac{10}{\sqrt5-1}$	14.	$\frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}$	15.	$\frac{6}{\sqrt7+\sqrt5}$	16.	$\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$
17.	$\frac{\sqrt3}{2\sqrt3-1}$	18.	$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$	19.	$\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{11}}$	20.	$\frac{1}{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}$

Απαντήσεις : 12. $\frac{\sqrt6}{6}$

184. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις :

1.	$\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt4}}}$	2.	$\sqrt{88-\sqrt{44+\sqrt{25}}}$	3.	$\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{10+\sqrt{36}}}}$
4.	$\sqrt{9-\sqrt{21+\sqrt{19-\sqrt9}}}$	5.	$\sqrt{\frac{\sqrt4}{2}+\sqrt9}+\sqrt{\sqrt{16}}$	6.	$\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt9}}$
7.	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt4}}}$	8.	$\sqrt[3]{25+\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}}$	9.	$\sqrt{169}+\sqrt{(219)^0}-\sqrt{3^4}+\sqrt{(-12)^2}$
10.	$\sqrt{\sqrt9+\sqrt{16}+\sqrt{81}}$	11.	$\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2}+4+\sqrt{5+\sqrt{16}}}$	12.	$\sqrt{3\sqrt{\left(-\frac19\right)^2}-\left(\sqrt{\frac{1}{16}}-\sqrt{\frac{1}{36}}\right)}$
13.	$\sqrt{\frac{36}{5}\sqrt{\frac{25}{3}\sqrt{\frac{9}{2}\sqrt4}}}$	14.	$\sqrt{75+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{16}}}}$	15.	$\sqrt{55-\sqrt{33+\sqrt{14-\sqrt{23+\sqrt4}}}}$
16.	$\sqrt{19-\sqrt[3]{29-\sqrt[4]{16}}}$	17.	$\sqrt{\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt4}+\sqrt[3]{27}}$	18.	$\sqrt{18\cdot\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[3]{8}}}$
19.	$\left(\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[5]{3\cdot\sqrt2}}:\sqrt[5]{3\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}\right)\cdot\sqrt[20]{4}\cdot\sqrt[15]{9}$			20.	$\frac{3^{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3^3\cdot\sqrt3}}}{\sqrt[5]{2^8}\cdot\sqrt[5]{3-\sqrt5}\cdot\sqrt[5]{3+\sqrt5}}$

Απαντήσεις :

1.	4	2.	9	3.	2	4.	2	5.	4
6.	5	7.	2	8.	3	9.	17	10.	4

11.	3	12.	1/2	13.	6	14.	9	15.	7
16.	4	17.	2	18.	6	19.		20.	

185. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

1.	$\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$	2.	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
3.	$\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$	4.	$\frac{1}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\sqrt{10}-1\right)^2}$
5.	$\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}-4}$	6.	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$
7.	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\sqrt{15}$	8.	$\frac{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{\sqrt[3]{8}}$
9.	$\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}$		

186. Να υπολογίσετε μεταξύ ποιων ακεραίων βρίσκονται οι αριθμοί :

1.	$\sqrt{21}$	2.	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3.	$\frac{25}{3}$	4.	$-\frac{42}{15}$	5.	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$
6.	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	7.	$\frac{53}{21}$	8.	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$	9.	$\frac{\sqrt{78}}{3}$	10.	$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$
11.	$\frac{\sqrt[3]{120}}{2}$	12.	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$	13.	$\frac{7}{\sqrt{2}}$	14.	$\frac{15}{\sqrt{3}}$	15.	$\frac{5-\sqrt{111}}{2}$
16.	$2+\frac{\sqrt{69}}{5}$	17.	$\frac{\sqrt{256}}{3}$	18.	$\frac{-3+\sqrt{63}}{6}$	19.	$\frac{\sqrt{625}}{4}$	20.	$\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$

187. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

α) $\sqrt{36\chi^4+12\chi^2+1}$ β) $\sqrt{\frac{1}{4}\chi^4+\frac{3}{5}\chi^2+\frac{9}{25}}$ γ) $\sqrt{\frac{\chi^4}{25y^2}+1+\frac{25y^2}{4\chi^4}}$

δ) $\frac{\sqrt{(\chi-1)^2}}{1-\chi}-\frac{\sqrt{\chi^2-4\chi+4}}{\chi-2}$ αν $1<\chi<2$ ε) $\frac{\sqrt{\chi^2+4\chi+4}}{\chi+2}+\frac{\sqrt{\chi^2-6\chi+9}}{\chi-3}$, αν $\chi\in(-2\ ,\ 3)$

188. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $(3-\sqrt{3})\chi+2-\sqrt{3}=-1$ β) $-\sqrt{3}\chi+\sqrt{12}=-\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{5}\chi-\sqrt{45}=-\chi+3$

189. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω ζευγάρια είναι αντίστροφοι αριθμοί :

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{2}}$	2.	$-2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3}$
3.	$\frac{5}{2\sqrt{2}}$, $\frac{4}{5\sqrt{2}}$	4.	$\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$, $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$
5.	$-3-2\sqrt{2}$, $-3+2\sqrt{2}$	6.	$1-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-1$
7.	$\frac{15}{\sqrt{3}}\frac{15}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{5\sqrt{3}}$	8.	$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$, $\frac{5}{2}$
9.	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	10.	$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

11.	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$	12.	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$
13.	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}$, $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$	14.	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$, $\sqrt{5}-2$
15.	$\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$, $\frac{\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}}{2}$	16.	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

278. Να αποδείξετε ότι :

1.	$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$	2.	$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)=1$
3.	$\sqrt{6+\sqrt{35}}-\sqrt{6-\sqrt{35}}=\sqrt{10}$	4.	$\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{14}$

279. Να συγκρίνετε τα παρακάτω ζευγάρια αριθμών :

1.	2 , $\sqrt{3}$	2.	3 , $\sqrt{10}$	3.	$2\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$
4.	$3\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$	5.	$\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}$	6.	$\sqrt{2}-2$, $\sqrt{5}-\sqrt{3}$
7.	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$	8.	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$	9.	$2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}-\sqrt{14}$
10.	$\sqrt[5]{5}$, $\sqrt{2}$	11.	$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$	12.	$\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{10}$
13.	$\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{2}$	14.		15.	

280. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες :

1.	$\sqrt{5}+\sqrt{2}<\sqrt{10}+1$	2.	$\sqrt{10}+\sqrt{7}<3+2\sqrt{2}$
3.	$\sqrt{8+2\sqrt{6}}>\sqrt{2}+\sqrt{3}$	4.	$\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$
5.	$\sqrt{3}-1<\sqrt[3]{11-6\sqrt{3}}$	6.	$1+\sqrt{3}>\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$
7.	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{15}\geq 4$	8.	$6>\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{5}$
9.	$\sqrt[4]{9-\sqrt{15}}>\sqrt{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}}$		

281. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες (όλες οι υπόριζες ποσότητες είναι μη αρνητικές) :

1.	$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$, $x>0$	2.	$\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}>2$
3.	$\sqrt{x+16}\leq\sqrt{x}+4$	4.	$\sqrt{4\alpha+9\beta}\leq 2\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}$
5.	$\sqrt{(\alpha+2)(\beta+3)}\leq\sqrt{3\alpha}+\sqrt{2\beta}$	6.	$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2\geq 4\sqrt{\alpha\beta}$
7.	$\frac{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2}{2}\leq\alpha+\beta$	8.	$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\geq 2\left(\sqrt{\alpha\beta}-\beta\right)$
9.	$\sqrt{\frac{\alpha+4\beta}{2}}\geq\frac{\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}}{2}$	10.	$1+\alpha\geq 2\sqrt{\alpha}$
11.	$(\alpha+1)(\beta+1)\geq\sqrt{16\alpha\beta}$	12.	$\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$
13.	$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$		

282. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες (α , $\beta > 0$) :

1.	$\dfrac{8\alpha\beta}{\alpha+2\beta} \le \sqrt{8\alpha\beta} \le \alpha+2\beta$	2.	$\dfrac{2\sqrt{\alpha}\left(5\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}\right)}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \ge \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$
3.	$\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}}+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \ge \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$		

283. Να δειχθεί ότι αν $\alpha^2+\beta^2=1$, τότε : $|\alpha+\beta| \le \sqrt{2}$

284. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : 1) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$ 2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

3.	$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	4.	$\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	5.	$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$
6.	$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$	7.	$\sqrt{9-2\sqrt{14}}$	8.	$\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$
9.	$\sqrt{54+14\sqrt{5}}$	10.	$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$	11.	$\sqrt{18-8\sqrt{2}}$
12.	$\left(\sqrt{5}+3\right)\sqrt{14-6\sqrt{5}}$	13.	$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}$	14.	$\dfrac{\left|-\alpha^2-\beta^2\right|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$
15.	$\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}}$	16.	$\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}}$	17.	$\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$

285. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : α) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$ β) $\sqrt[4]{\left(7-4\sqrt{3}\right)^2}$.

286. α) Να βρείτε τα αναπτύγματα : $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

287. 1) Να βρείτε τα αναπτύγματα : $\alpha=\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ και $\beta=\left(3\sqrt{3}-1\right)^2$.

2) Να αποδείξετε ότι : $\alpha > \beta$.

3) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A=\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{6}+7}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$.

288. 1) Να βρείτε τα αναπτύγματα : $\left(2+\sqrt{3}\right)^3$, $\left(2-\sqrt{3}\right)^3$

2) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων : α) $A=\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)\sqrt{27}$

β) $B=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ γ) $\Gamma=\dfrac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}$.

289. Δίνεται ο αριθμός $\alpha=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{\sqrt{3}+2}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$. β) Να βρείτε τον αριθμό α^2.
γ) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$.

290. Είναι γνωστό ότι : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ και $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί : $\chi=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, $\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

291. Αν $\alpha < 0 < \chi < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

1.	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}}{\alpha-\beta}+\dfrac{\sqrt{\alpha^2}}{\alpha}-\dfrac{\sqrt{\beta^2}}{\beta}$	2.	$\sqrt[4]{\alpha^4}+\sqrt{\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$
3.	$\sqrt{\alpha^4\beta^2-2\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4}$	4.	$\left(\dfrac{\beta\sqrt{\beta}+\chi\sqrt{\chi}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\chi}}-\sqrt{\beta\chi}\right)\left(\dfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\chi}}{\beta-\chi}\right)^2$
5.	$\dfrac{\sqrt{\dfrac{\beta+\chi}{\beta-\chi}}-\sqrt{\dfrac{\beta-\chi}{\beta+\chi}}}{\sqrt{\dfrac{\beta+\chi}{\beta-\chi}}+\sqrt{\dfrac{\beta-\chi}{\beta+\chi}}}$	6.	$A=\left[\dfrac{1}{\left(\beta^{\frac{1}{2}}+\chi^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\chi}}{\beta^{\frac{3}{2}}-\chi^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right]\cdot(\beta\chi)^{-\frac{1}{2}}$

Απαντήσεις :

1.		2.		3.		4.	
5.		6.	1				

292. Αν $\alpha > \beta > 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση : $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}}+\sqrt[3]{\beta\sqrt{\beta}}}\cdot\sqrt{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}}$.

293. α) Να βρείτε τους αριθμούς : $\alpha=\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[6]{28+20\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}$ και $\beta=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $A=\sqrt[3]{\alpha\beta^{-1}\cdot\sqrt{\alpha^{-1}\beta^2\cdot\sqrt{\alpha^{-2}}}}$.

294. α) Να δείξετε ότι : $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}>0$.

β) Να υπολογιστεί η παράσταση : $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$. $\left(\text{Απ}: \alpha=\sqrt{2}\right)$

295. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $\sqrt{(6\cdot6\cdot6)^2+(666-6\cdot6)^2}$.

296. Αν $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$ με $\alpha^2+\beta^2=1$ **(1)** και $\alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ **(2)** , να δείξετε ότι : $\alpha^3+\beta^3=\dfrac{3\sqrt{3}+1}{8}$.

297. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$ και $B=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$.

α) Να δείξετε ότι $A=\sqrt{2}$ και $B=\sqrt{3}$.

β) Ως γνωστόν το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις Α και Β είναι $E=A\cdot B$. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου με διαστάσεις $\left(\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}\right)$ cm και $\left(\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}\right)$ cm με ακρίβεια εκατοστού, αν γνωρίζετε ότι $2{,}45^2=6$.

298. α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β , αν : $\sqrt{\alpha-2}+\sqrt[3]{\beta+3}=0$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $\sqrt[3]{3\left(\sqrt{\alpha-\beta}-\sqrt{\alpha}\right)^2\left(7+2\sqrt{10}\right)}$.

299. **<u>Θέμα Γ :</u>**

Γ1. Να αποδείξετε ότι : $\left(3\sqrt{5}+7\right)^2=94+42\sqrt{5}$. (Μονάδες 8)

Γ2. Να δείξετε ότι : $3\sqrt{5}-7<0$. (Μονάδες 7)

Γ3. Να αποδειχθεί ότι : $\dfrac{3\sqrt{20}}{\sqrt{94+42\sqrt{5}}-\sqrt{94-42\sqrt{5}}}=1$. (Μονάδες 10)

300. **<u>Θέμα Γ :</u>**

Γ1. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A=\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}-\sqrt{3\sqrt{3}-4}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}+\sqrt{3\sqrt{3}-4}\right)$. (Μονάδες 9)

Γ2. Να υπολογίσετε την παράσταση : $B=\sqrt{A}+\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

Γ3. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{1}{\sqrt[3]{B}\cdot\sqrt{A}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή. (Μονάδες 8)

301. **<u>Θέμα Γ :</u>**

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό : $\alpha=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\sqrt{12}}$. (Μονάδες 7)

Γ2. Να βρείτε τον αριθμό : $\beta=\sqrt{8}\cdot\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}\cdot\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha}}$. (Μονάδες 8)

Γ3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $\Pi=\left(\sqrt{6+\beta\sqrt{\alpha}}-3\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$. (Μονάδες 10)

302. **<u>Θέμα Γ :</u>**

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό : $\alpha=\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2^7}}}\cdot\sqrt[8]{8}$. (Μονάδες 8)

Γ2. Να βρείτε τον αριθμό : $\beta=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[6]{2\sqrt{2}+3}$. (Μονάδες 8)

Γ3. Να υπολογιστεί το γινόμενο : $\Gamma=\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}}\cdot\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}}$. (Μονάδες 9)

303. **<u>Θέμα Γ :</u>**

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό : $\alpha=\sqrt[5]{3^4\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[10]{3}$. (Μονάδες 8)

Γ2. Να βρείτε τον αριθμό : $\beta=\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5^2}\cdot\sqrt[6]{5^4}}{\sqrt{5}}$. (Μονάδες 9)

Γ3. Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή :

α) $A=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ β) $B=\dfrac{10}{\sqrt[\alpha]{\beta}\cdot\sqrt[\beta]{\alpha}}$ (Μονάδες 8)

304. α) Αν $A=\dfrac{2\sqrt{15}-8}{\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}\right)}$ να δείξετε ότι : $A=\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

β) Αν $B=1-\sqrt{3}$ να αποδείξετε ότι $B<A$.

305. Αν $\alpha=2-\sqrt{3}$ και $\beta=2+\sqrt{3}$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $A=\alpha^{-2}+\beta^{-2}-7\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$.

306. Αν $\chi=3+\sqrt{5}$ και $y=3-\sqrt{5}$, να δείξετε ότι : $4\chi^{-2}+4y^{-2}+3\chi^{-1}\cdot y^{-1}=\dfrac{25}{4}$.

307. α) Να βρείτε τους αριθμούς : $\chi=\left(\sqrt{27}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{3}\right)$, $y=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^7}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2^5}}$ και

$\omega=\sqrt{10}\cdot\sqrt{4-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{6}}$.

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{\omega}{\sqrt{\chi}-\sqrt{y}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

308. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A=\sqrt[5]{\sqrt[6]{6^2}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[4]{6^9}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[10]{\sqrt[4]{6^{19}}}}$.

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{4}{A}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

309. α) Αν $\alpha > \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}}$.

β) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2020}+\sqrt{2017}} = \dfrac{\sqrt{2020}-\sqrt{2017}}{\sqrt{3}}$.

310. α) Να βρείτε τον αριθμό : $\alpha = -11 \cdot \dfrac{9+\sqrt{75}}{15-7\sqrt{12}} \cdot \dfrac{13-\sqrt{147}}{4+\sqrt{27}}$.

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $A = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}-\dfrac{2}{\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}}}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

311. Δίνονται οι αριθμοί : $\alpha = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 36^{\frac{1}{2}}$ και $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^2\sqrt[4]{3^7}}} \cdot \left(\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Αν ισχύει $\alpha < \chi < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης : $\Pi = \dfrac{\sqrt{\chi^2}}{\chi} - \dfrac{\sqrt{\chi^2-2\chi+1}}{\chi-1}$.

312. α) Αν $\nu \geq 0$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} = \sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}$.

β) Να υπολογιστεί η παράσταση : $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

313. α) Να βρείτε τους αριθμούς α , β $\in \mathbf{R}$, αν : $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\sqrt{3}-2\beta\sqrt{5}+8=0$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \left(\dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{5}{\beta}\right)(\beta-\alpha)$.

314. **<u>Θέμα Δ :</u>**

Δίνονται οι αριθμοί : $\alpha = \dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{72}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}}$ και $\beta = \left(\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+13\right) : \sqrt{12}$.

Δ1. Να βρείτε τους αριθμούς α και β. (Μονάδες 12)

Δ2. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \sqrt{\dfrac{4}{\left(1-\sqrt{\alpha}\right)^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)^2}}$. (Μονάδες 7)

Δ3. Να βρείτε τον αντίστροφο του Α και να τον γράψετε ως κλάσμα με ρητό παρονομαστή. (Μονάδες 6)

315. α) Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha = \dfrac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[12]{27}}$ και $\beta = \sqrt{2^2\sqrt[3]{2^4\sqrt{2}}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \dfrac{\chi^2-6\chi+\alpha}{\chi^3-\beta\chi} \cdot \dfrac{\chi^3-\beta^{\frac{1}{2}}\cdot\chi^2}{\chi^2-\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\chi}$

316. **<u>Θέμα Δ :</u>**

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$. (Μονάδες 4)

Δ2. Αν $\chi = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, να δείξετε ότι : $\chi^3 = 4-3\chi$. (Μονάδες 7)

Δ3. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $\chi^3+3\chi-4$. (Μονάδες 7)

Δ4. Να βρείτε τον αριθμό χ. (Μονάδες 7)

2.5 Γενικές Ασκήσεις

317. Δείξτε ότι :
α) η διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών είναι περιττός
β) η διαφορά των κύβων δύο διαδοχικών περιττών είναι άρτιος.

318. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \dfrac{36χ^2 - 36χy - 72χ + 72y}{χ^4 - 4χ^2 - χ^2y^2 + 4y^2}$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση A , όταν $χ = 2^{12} \cdot 25^6 \cdot (-10)^{11}$ και $y = \dfrac{\left(2^{-4}\right)^{-5} \cdot \left(2^2\right)^{-9}}{8^8 : 4^{11}}$.

319. α) Να βρείτε τος αριθμούς α και β , αν $α^2 + β^2 = 4(2β - α - 5)$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \dfrac{\left(α^2β^{-3}\right)^{-2} \cdot \left(α^{-1}β^3\right)^{-4} \cdot αβ^4}{\left(α^3β^{-1}\right)^{-3}}$.

320. α) Να βρείτε τος αριθμούς α και β , αν $α^2 + β^2 + 18 = 6(β - α)$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \dfrac{α^{16}}{β^{13}} : \left[\dfrac{\left(β^2\right)^5}{α^{10} : α^{-3}} : \dfrac{\left(α^{11}\right)^2}{\left(β^7\right)^4}\right]$.

321. Δίνεται ο αριθμός $χ = \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$.
α) Να βρείτε τον αριθμό : $2021^χ$.
β) Αν $α, β \in \mathbf{R}$, με $αβ < χ$, να δείξετε ότι : $\dfrac{α - 4}{β} + \dfrac{4}{αβ} < \dfrac{4 - β}{α} - \dfrac{4}{αβ}$.

322. α) Να βρείτε τος αριθμούς $α = \sqrt{2 \cdot \sqrt[5]{2^3 \cdot \sqrt[3]{2}}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$ και $β = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{6}}$.
β) Αν $β < χ < α$, να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = |2χ - 6| - |3χ - 12|$.

323. α) Να βρείτε τον αριθμό : $α = \dfrac{\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{4^3} \cdot \sqrt[4]{4^5}}{\sqrt[6]{4^{11}} \cdot \sqrt[12]{4}}$.

β) Αν $|χ| \le α^{\frac{1}{3}}$ και $|y| \le α^{\frac{2}{3}}$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση : $A = 3χ - y + 5$.

324. α) Να βρείτε τον αριθμό $α = 8^{\frac{1}{11}} \cdot 3^{\frac{7}{11}} \cdot 12^{\frac{4}{11}}$.
β) Να βρείτε τον αριθμό $β = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{α} - \sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{α}}{\sqrt{α} + \sqrt{2}}$.
γ) Να δείξετε ότι : $8(χ - β)^2 \ge (2χ - α)^2 - (α - β)^{\frac{1}{2}}$.

325. α) Να βρείτε τον αριθμό $α = \left(\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}\right)^2$.
β) Να βρείτε τον αριθμό $β = \sqrt[3]{3 + \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4 - \sqrt{7}}$.
γ) Αν ισχύει $α < χ < β$ να δείξετε ότι η παράσταση : $A = \sqrt{χ^2 - 4χ + 4} + \sqrt{χ^2 - 6χ + 9}$ είναι ανεξάρτητη του χ.

326. (Σχολή Ικάρων 1976)

α) Αν χ , y$\in$**R*** δείξτε ότι : $\left|\frac{\chi}{y}\right| + \left|\frac{y}{\chi}\right| \geq 2$

β) Αν α, β, γ, χ, y, ω $\in$**R*** και $\alpha = \frac{\chi}{|y|+|\omega|}$, $\beta = \frac{y}{|\omega|+|\chi|}$, $\gamma = \frac{\omega}{|\chi|+|y|}$ να δείξετε ότι $\frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\gamma|} \geq 6$.

327. (Ρουμάνικη Μαθηματική Εταιρία)

Αν $\chi = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ να δειχθεί ότι : $\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right)^3 + \left(\chi^2 + \frac{1}{\chi^2}\right)^2 + \left(\chi^3 + \frac{1}{\chi^3}\right) = 94$.

328. Αν $\alpha = \sqrt[7]{\chi + \beta^7}$, $\beta = \sqrt[7]{y + \gamma^7}$, $\gamma = \sqrt[7]{z + \alpha^7}$, να δειχθεί ότι : $\chi^3 + y^2 + z^3 = 3\chi yz$.

329. <u>Παράξενα Μαθηματικά</u> :

α) Να υπολογισθεί η παράσταση : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$ (άπειρα ριζικά)

β) Έστω η παράσταση $A = \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + ...}}}}}$ (άπειρα ριζικά)

$\Leftrightarrow \quad A + \nu = \nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + ...}}}}}$ (προσθέτουμε και στα 2 μέλη ν)

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{A+\nu} = \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + ...}}}}}}$ (βάζουμε ρίζες)

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{A+\nu} = A$ (το 2^{ο} μέλος είναι Α)

$\Leftrightarrow \quad A + \nu = A^2 \quad \Leftrightarrow \quad \nu = A^2 - A$ (υψώνουμε στο τετράγωνο)

<u>2^{ος} Τρόπος</u> : $A = \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + ...}}}}}$ (υψώνουμε στο τετράγωνο)

$A^2 = \nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + ...}}}}} \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = \nu + A \quad \Leftrightarrow \quad A^2 - A - \nu = 0$

για $A = 2$ θα πάρω $\nu = 2$, δηλ. $2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}}}$

για $A = 1$ θα πάρω $\nu = 0$, δηλ. $1 = \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + ...}}}}}$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

330. <u>Η μαγεία των μαθηματικών :</u>

α) **ν! (ν παραγοντικό)** : $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot \nu$, με $\nu \in \mathbf{N}^*$ και $0! = 1$.

β) **3 φίλοι** κάθονται στη σειρά και θέλουν να βγάλουν φωτογραφία με όλους τους δυνατούς τρόπους. Οι διαφορετικές θέσεις που μπορούν να κάτσουν στη σειρά λέγονται **<u>μεταθέσεις</u>** και είναι συνολικά $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, δηλαδή 6 περιπτώσεις. Αν καταφέρνουν να βγάζουν 1 φωτογραφία το δευτερόλεπτο, θέλουν 6 δευτερόλεπτα για να βγάλουν φωτογραφίες με όλους τους δυνατούς τρόπους.

γ) Πόσο χρόνο χρειάζονται **5 φίλοι** για να κάνουν το αντίστοιχο; (Απ: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, 2 min)

δ) **8 φίλοι**; (Απ: $8! = 40.320$, 11,2 ώρες)

ε) **10 φίλοι**; (Απ: 42 ημέρες)

στ) **12 φίλοι**; (Απ: 15,2 χρόνια περίπου)

ζ) **15 φίλοι**; (Απ: 415 αιώνες περίπου)

η) **20 φίλοι**; (Απ: 77.146.816.596 χρόνια περίπου)

θ) Η ηλικία του Σύμπαντος είναι περίπου 13.798.000.000 χρόνια !!! (20 φίλοι σε 5,6 σύμπαντα) ι) **25 φίλοι** θα χρειαστούν περίπου 36 εκατομμύρια φορές την ηλικία του Σύμπαντος !!!

331. <u>Όλα είναι 6 :</u>
Στα παρακάτω βάλτε οποιοδήποτε μαθηματικό σύμβολο ώστε να ισχύει η ισότητα.
Π, χ. 6 / (6 / 6) = 6

0 0 0 = 6	1 1 1 = 6	2 2 2 = 6	3 3 3 = 6
4 4 4 = 6	5 5 5 = 6	6 6 6 = 6	7 7 7 = 6
8 8 8 = 6	9 9 9 = 6		

332. <u>Όλα είναι 9 :</u>
Χρησιμοποιώντας πάντα τρία 9 δημιουργήστε τους ακεραίους από 0 – 12 χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε μαθηματικό σύμβολο.